

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet STK4500 v2008: Finans og forsikring

Prosjektoppgave, utlevering fredag 13. juni kl. 9.00, innlevering tirsdag 17. juni kl. 14.30. Besvarelsen skal leveres i to eksemplarer i Ekspedisjonen i 7. etg. på Abel.

Sammen med besvarelsen av spørsmål som stilles i oppgaven skal kandidaten legge ved utskrift av programkode for de beregninger som besvarelsen bygger på.

Etterfølgende muntlig evaluering fredag 20. juni og mandag 23. juni i henhold til publisert liste for fordeling av kandidater til de to dagene. Oppmøte kl. 9.00 i B71 for tildeling av individuelt tidspunkt.

For fastsettelse av endelig karakter teller skriftlig besvarelse 3/4 og muntlig 1/4.

I denne oppgaven skal vi analysere og sammenligne risikomessige egenskaper ved innskuddsbasert pensjon, ytelsesbasert pensjon og en alternativ pensjonsordning som kombinerer innskuddsbasert og ytelsesbasert pensjon (som vil bli definert mer presist og som vi vil kalle hybridordning).

For alle typer pensjonsordninger står vi overfor det samme finansielle markedet som består av to finansielle eiendeler. En enhet av hver av eiendelene har verdier hhv. B_0 og S_0 på tid 0, og eiendelenes verdi på tid t , hhv. B_t og S_t , er bestemt av en to-dimensjonal Geometrisk Brownsk Bevegelse som følger:

$$B_t = B_0 \cdot \exp \left[\left(\mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \cdot t + \sigma_B \cdot V_t \right]$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \cdot t + \sigma_S \cdot W_t \right]$$

$$(V_t, W_t) \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gjennom hele oppgaven skal vi benytte følgende parametrisering for beskrivelsen av finansmarkedet:

$$\mu_B = 0,05$$

$$\sigma_B = 0,05$$

$$\mu_S = 0,10$$

$$\sigma_S = 0,20$$

$$\rho = 0,40$$

Eiendelen med verdiutvikling S_t kaller vi aksjer og eiendelen med verdiutvikling B_t kaller vi obligasjoner.

Vi skal se på kostnaden ved å finansiere fremtidig alderspensjon for én enkelt arbeidstager. På tid 0 kommer arbeidstageren med i pensjonsordningen som nytt medlem i alder $x = 30$ år. Pensjonsalderen er $x + n = 65$ år. Arbeidstagerens årslønn på tid t , L_t , er bestemt av følgende stokastiske dynamikk:

$$L_0 = 300\,000$$

$$L_t = (1 + \lambda) \cdot L_{t-1} + \theta \cdot \delta_t \cdot L_{t-1}; t = 1, \dots, n \text{ med } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \text{ u. i. d. } \sim N(0,1)$$

$$\lambda = 0,03$$

$$\theta = 0,015$$

Vi antar stokastisk uavhengighet mellom (V_t, W_t) på ene side og $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ på den annen side.

For beregning av premier og premiereserver for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning regnes det med grunnlagsrente $i = 0,03$ og dødsintensitet $v_{x+t} = \beta \cdot c^{x+t}$ i alder $x + t$, der:

$$\beta = 0,0000202$$

$$c = 1,1015$$

For sammenligning av kostnaden ved å finansiere fremtidig alderspensjon skal vi regne ut kontantverdien på tid 0 av de løpende innskudds/premiekostnader fra opptak i pensjonsordningen til siste premiebetaling. For denne kontantverdiberegningen skal vi regne med diskonteringsrente $r = 0,06$.

I alternativet innskuddsbasert pensjon betales innskudd helårlig forskuddsvis fra opptak i pensjonsordningen til året før nådd pensjonsalder med $100 \cdot p^l\%$ av årslønn til enhver tid. Med P_t^l som notasjon på innskudd på tid t , er følgende:

$$P_t^l = p^l \cdot L_t; t = 0, \dots, n - 1$$

Vi skal regne med innskuddssats lik 6%, dvs.:

$$p^l = 0,06$$

Saldoen på innskuddskontoen akkumuleres med avkastning som oppnås i finansmarkedet og uten dødelighetsarv. Ved nådd pensjonsalder benyttes saldoen som da er akkumulert til å sikre en livsvarig helårlig forskuddsvis utbetaling av fremtidig alderspensjon, basert på samme beregningsgrunnlag som benyttes for beregning av premie og premiereserve for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning¹.

Vi antar at innskuddskontoen allokeres med en andel 20% i aksjer og 80% i obligasjoner til enhver tid.

Spsm. 1. Redegjør for rebalanseringen som må gjennomføres for å opprettholde et slikt fast innbyrdes forhold 20%/80% mellom aksjer og obligasjoner.

Spsm. 2. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for innskuddsordningens pensjonsnivå, målt som forholdet mellom sikret årlig pensjonsytelse og årlig lønn ved nådd pensjonsalder, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

Spsm. 3. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av årlig innskudd, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

¹ Med grunnlagsrente $i = 0,03$ og finansmarked og allokering som beskrevet, vil det også i utbetalingstiden oppstå "avkastningsoverskudd" som kan gi grunnlag for oppregulering av den løpende pensjonsutbetalingen. I oppgaven fokuserer vi på pensjonsytelsen som kan sikres ved nådd pensjonsalder, og vi kan da se bort fra virkningen av slik mulig regulering. Tilsvarende gjelder for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning og hybridordning.

I alternativet ytelsesbasert pensjon skal vi anta at opptjeningen skjer lineært og i forhold til årlig lønn ved årets slutt til enhver tid. Med ytelsesnivå $100 \cdot y^Y\%$ av årslønn skal opptjent pensjon på tid t , O_t^Y , følgelig beregnes som:

$$O_t^Y = \frac{t}{n} \cdot y^Y \cdot L_t; t = 1, \dots, n$$

Finansieringskravet i ytelsesordningen fastsettes slik at det på tid t ; $t = 1, \dots, n$ skal være avsatt en premiereserve som dekker opptjent pensjon på dette tidspunktet. Premiebetaling for å ivareta finansieringskravet på tid t skjer på tid t . (Premiebetalingsplanen er følgelig helårlig etterskuddsvis). Avsatt premiereserve godskrives avkastning som oppnås i finansmarkedet og dødelighetsarv i henhold til beregningsgrunnlaget. Negative premier kan tillates.

Vi skal nå sammenligne kostnader ved alternativene innskuddsbasert og ytelsesbasert pensjonsordning slik de er beskrevet i det foregående. Nivået i ytelsesordningen, y^Y , settes lik forventet pensjonsnivå som for innskuddsordningen fra **Spsm. 2**.

Spsm. 4. Gjør rede for hva som kan være årsak til beregnet negativ premie i ytelsesordningen. Hva er den praktiske tolkningen av at premien er negativ?

Spsm. 5. Gjør rede for hvorfor det bør benyttes samme underliggende stokastiske scenarier for hhv. finansmarkedsutvikling og lønnsutvikling i sammenligningen.

Spsm. 6. Still opp uttrykk for kravet til avsetning og premie i ytelsesordningen på tid t ; $t = 1, \dots, n$.

Spsm. 7. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av årlig premiebetaling, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen? Sammenlign med forventning og standardavvik i **Spsm. 3** og kommenter.

Spsm. 8. Hva er korrelasjonen mellom kontantverdiene av premiebetalingen for hhv. innskuddsordningen og ytelsesordningen? Kommenter.

Vi introduserer nå en hybrid pensjonsordning, som kombinerer egenskapene ved innskuddsbasert pensjonsordning og ytelsesbasert pensjonsordning, i korthet som "innskuddsbasert pensjon med garantert minimumsnivå". Utgangspunktet er som i en innskuddsbasert pensjonsordning med årlig innskudd $100 \cdot p^H\%$ av årslønn til enhver tid. Hvis det viser seg at innskuddssaldoen ved nådd pensjonsalder er lavere enn det som skal til for å sikre livsvarig helårlig forskuddsvis pensjon på et fastsatt nivå $100 \cdot y^H\%$ av årslønn da, skal alderspensjonen likevel settes lik dette nivået. I tilfelle denne garantien om et minste garantert pensjonsnivå blir effektiv, betales en egen engangspremie ved pensjonsalder slik at det oppnås full dekning for en livsvarig helårlig forskuddsvis pensjon på nivå $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder.

Spsm. 9. Vi setter $p^H = 0,05$. Vis ved Monte Carlo simulering at for at forventet pensjonsnivå skal være som i innskuddsordningen og ytelsesordningen vi har sett på i det foregående, så må y^H da settes lik ca. 0,229. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for hybridordningens pensjonsnivå, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er sannsynligheten for at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder blir effektiv? Hva er sannsynligheten for at pensjonsnivået ved hybridordningen blir høyere enn ved innskuddsordningen?

Spsm. 10. Vi regner nå med aksjeandel 30% i stedet for 20% både for innskuddsordningen og for hybridordningen, samtidig som vi opprettholder innskuddssatsene $p^I = 0,06$ og $p^H = 0,05$. Hva må y^H da fastsettes til for at forventet pensjonsnivå i hybridordningen skal være det samme som i innskuddsordningen? Hva er sannsynligheten for at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder blir effektiv? Hva er sannsynligheten for at pensjonsnivået ved hybridordningen blir høyere enn ved innskuddsordningen? Sammenlign med resultatene i **Spsm. 9** og kommenter.

Spsm. 11. Slik hybridordningen er beskrevet, er det bare ved fortsatt ansettelse og medlemskap til nådd pensjonsalder at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn får virkning. Diskuter mulige modifikasjoner av hybridordningen slik at opptjent pensjon som skal sikres ved fratredelse før nådd pensjonsalder også vil inneholde et element med garanti om et minste pensjonsnivå.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet STK4500 v2008: Finans og forsikring

Prosjektoppgave, utlevering fredag 13. juni kl. 9.00, innlevering tirsdag 17. juni kl. 14.30. Besvarelsen skal leveres i to eksemplarer i Ekspedisjonen i 7. etg. på Abel.

Sammen med besvarelsen av spørsmål som stilles i oppgaven skal kandidaten legge ved utskrift av programkode for de beregninger som besvarelsen bygger på.

Etterfølgende muntlig evaluering fredag 20. juni og mandag 23. juni i henhold til publisert liste for fordeling av kandidater til de to dagene. Oppmøte kl. 9.00 i B71 for tildeling av individuelt tidspunkt.

For fastsettelse av endelig karakter teller skriftlig besvarelse 3/4 og muntlig 1/4.

I denne oppgaven skal vi analysere og sammenligne risikomessige egenskaper ved innskuddsbasert pensjon, ytelsesbasert pensjon og en alternativ pensjonsordning som kombinerer innskuddsbasert og ytelsesbasert pensjon (som vil bli definert mer presist og som vi vil kalle hybridordning).

For alle typer pensjonsordninger står vi overfor det samme finansielle markedet som består av to finansielle eiendeler. En enhet av hver av eiendelene har verdier hhv. B_0 og S_0 på tid 0, og eiendelenes verdi på tid t , hhv. B_t og S_t , er bestemt av en to-dimensjonal Geometrisk Brownsk Bevegelse som følger:

$$B_t = B_0 \cdot \exp \left[\left(\mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) \cdot t + \sigma_B \cdot V_t \right]$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \cdot t + \sigma_S \cdot W_t \right]$$

$$(V_t, W_t) \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gjennom hele oppgaven skal vi benytte følgende parametrisering for beskrivelsen av finansmarkedet:

$$\mu_B = 0,05$$

$$\sigma_B = 0,05$$

$$\mu_S = 0,10$$

$$\sigma_S = 0,20$$

$$\rho = 0,40$$

Eiendelen med verdiutvikling S_t kaller vi aksjer og eiendelen med verdiutvikling B_t kaller vi obligasjoner.

Vi skal se på kostnaden ved å finansiere fremtidig alderspensjon for én enkelt arbeidstager. På tid 0 kommer arbeidstageren med i pensjonsordningen som nytt medlem i alder $x = 30$ år. Pensjonsalderen er $x + n = 65$ år. Arbeidstagerens årslønn på tid t , L_t , er bestemt av følgende stokastiske dynamikk:

$$L_0 = 300\,000$$

$$L_t = (1 + \lambda) \cdot L_{t-1} + \theta \cdot \delta_t \cdot L_{t-1}; t = 1, \dots, n \text{ med } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \text{ u. i. d. } \sim N(0,1)$$

$$\lambda = 0,03$$

$$\theta = 0,015$$

Vi antar stokastisk uavhengighet mellom (V_t, W_t) på ene side og $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ på den annen side.

For beregning av premier og premiereserver for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning regnes det med grunnlagsrente $i = 0,03$ og dødsintensitet $v_{x+t} = \beta \cdot c^{x+t}$ i alder $x + t$, der:

$$\beta = 0,0000202$$

$$c = 1,1015$$

For sammenligning av kostnaden ved å finansiere fremtidig alderspensjon skal vi regne ut kontantverdien på tid 0 av de løpende innskudds/premiekostnader fra opptak i pensjonsordningen til siste premiebetaling. For denne kontantverdiregningen skal vi regne med diskonteringsrente $r = 0,06$.

I alternativet innskuddsbasert pensjon betales innskudd helårlig forskuddsvis fra opptak i pensjonsordningen til året før nådd pensjonsalder med $100 \cdot p^l\%$ av årslønn til enhver tid. Med P_t^l som notasjon på innskudd på tid t , er følgende:

$$P_t^l = p^l \cdot L_t; t = 0, \dots, n - 1$$

Vi skal regne med innskuddssats lik 6%, dvs.:

$$p^l = 0,06$$

Saldoen på innskuddskontoen akkumuleres med avkastning som oppnås i finansmarkedet og uten dødelighetsarv. Ved nådd pensjonsalder benyttes saldoen som da er akkumulert til å sikre en livsvarig helårlig forskuddsvis utbetaling av fremtidig alderspensjon, basert på samme beregningsgrunnlag som benyttes for beregning av premie og premiereserve for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning¹.

Vi antar at innskuddskontoen allokeres med en andel 20% i aksjer og 80% i obligasjoner til enhver tid.

Spsm. 1. Redegjør for rebalanseringen som må gjennomføres for å opprettholde et slikt fast innbyrdes forhold 20%/80% mellom aksjer og obligasjoner.

Spsm. 2. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for innskuddsordningens pensjonsnivå, målt som forholdet mellom sikret årlig pensjonsytelse og årlig lønn ved nådd pensjonsalder, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

Spsm. 3. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av årlig innskudd, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

¹ Med grunnlagsrente $i = 0,03$ og finansmarked og allokering som beskrevet, vil det også i utbetalingstiden oppstå "avkastningsoverskudd" som kan gi grunnlag for oppregulering av den løpende pensjonsutbetalingen. I oppgaven fokuserer vi på pensjonsytelsen som kan sikres ved nådd pensjonsalder, og vi kan da se bort fra virkningen av slik mulig regulering. Tilsvarende gjelder for alternativet ytelsesbasert pensjonsordning og hybridordning.

I alternativet ytelsesbasert pensjon skal vi anta at opptjeningen skjer lineært og i forhold til årlig lønn ved årets slutt til enhver tid. Med ytelsesnivå $100 \cdot y^Y\%$ av årslønn skal opptjent pensjon på tid t , O_t^Y , følgelig beregnes som:

$$O_t^Y = \frac{t}{n} \cdot y^Y \cdot L_t; t = 1, \dots, n$$

Finansieringskravet i ytelsesordningen fastsettes slik at det på tid t ; $t = 1, \dots, n$ skal være avsatt en premiereserve som dekker opptjent pensjon på dette tidspunktet. Premiebetaling for å ivareta finansieringskravet på tid t skjer på tid t . (Premiebetalingsplanen er følgelig helårlig etterskuddsvis). Avsatt premiereserve godskrives avkastning som oppnås i finansmarkedet og dødelighetsarv i henhold til beregningsgrunnlaget. Negative premier kan tillates.

Vi skal nå sammenligne kostnader ved alternativene innskuddsbasert og ytelsesbasert pensjonsordning slik de er beskrevet i det foregående. Nivået i ytelsesordningen, y^Y , settes lik forventet pensjonsnivå som for innskuddsordningen fra **Spsm. 2**.

Spsm. 4. Gjør rede for hva som kan være årsak til beregnet negativ premie i ytelsesordningen. Hva er den praktiske tolkningen av at premien er negativ?

Spsm. 5. Gjør rede for hvorfor det bør benyttes samme underliggende stokastiske scenarier for hhv. finansmarkedsutvikling og lønnsutvikling i sammenligningen.

Spsm. 6. Still opp uttrykk for kravet til avsetning og premie i ytelsesordningen på tid t ; $t = 1, \dots, n$.

Spsm. 7. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av årlig premiebetaling, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen? Sammenlign med forventning og standardavvik i **Spsm. 3** og kommenter.

Spsm. 8. Hva er korrelasjonen mellom kontantverdiene av premiebetalingen for hhv. innskuddsordningen og ytelsesordningen? Kommenter.

Vi introduserer nå en hybrid pensjonsordning, som kombinerer egenskapene ved innskuddsbasert pensjonsordning og ytelsesbasert pensjonsordning, i korthet som "innskuddsbasert pensjon med garantert minimumsnivå". Utgangspunktet er som i en innskuddsbasert pensjonsordning med årlig innskudd $100 \cdot p^H\%$ av årslønn til enhver tid. Hvis det viser seg at innskuddssaldoen ved nådd pensjonsalder er lavere enn det som skal til for å sikre livsvarig helårlig forskuddsvis pensjon på et fastsatt nivå $100 \cdot y^H\%$ av årslønn da, skal alderspensjonen likevel settes lik dette nivået. I tilfelle denne garantien om et minste garantert pensjonsnivå blir effektiv, betales en egen engangspremie ved pensjonsalder slik at det oppnås full dekning for en livsvarig helårlig forskuddsvis pensjon på nivå $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder.

Spsm. 9. Vi setter $p^H = 0,05$. Vis ved Monte Carlo simulering at for at forventet pensjonsnivå skal være som i innskuddsordningen og ytelsesordningen vi har sett på i det foregående, så må y^H da settes lik ca. 0,229. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for hybridordningens pensjonsnivå, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er sannsynligheten for at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder blir effektiv? Hva er sannsynligheten for at pensjonsnivået ved hybridordningen blir høyere enn ved innskuddsordningen?

Spsm. 10. Vi regner nå med aksjeandel 30% i stedet for 20% både for innskuddsordningen og for hybridordningen, samtidig som vi opprettholder innskuddssatsene $p^I = 0,06$ og $p^H = 0,05$. Hva må y^H da fastsettes til for at forventet pensjonsnivå i hybridordningen skal være det samme som i innskuddsordningen? Hva er sannsynligheten for at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn ved nådd pensjonsalder blir effektiv? Hva er sannsynligheten for at pensjonsnivået ved hybridordningen blir høyere enn ved innskuddsordningen? Sammenlign med resultatene i **Spsm. 9** og kommenter.

Spsm. 11. Slik hybridordningen er beskrevet, er det bare ved fortsatt ansettelse og medlemskap til nådd pensjonsalder at garantien om pensjonsnivå minst lik $100 \cdot y^H\%$ av årslønn får virkning. Diskuter mulige modifikasjoner av hybridordningen slik at opptjent pensjon som skal sikres ved fratredelse før nådd pensjonsalder også vil inneholde et element med garanti om et minste pensjonsnivå.