ND1750PRED

består av reglene/aksiomene i ND1750 pluss følgende

Regel	Mønster	Betingelser
Universell instansiering (UI)	$\dfrac{\forall x\ W}{\therefore W(x/t)}$	x har ingen fri forekomst i W innenfor skopet til en kvantor som binder en variabel i t.
Eksistensiell generalisering (EG)	$\dfrac{W(x/t)}{\therefore \exists x\ W}$	x har ingen fri forekomst i W innenfor skopet til en kvantor som binder en variabel i t.
Eksistensiell instansiering (EI)	$\dfrac{\exists x\ W}{\therefore W(x/c)}$	c er en konstant som til nå ikke har vært brukt i beviset c forekommer ikke i konklusjonen (det vil si siste linje av beviset)
Universiell generalisering (UG)	$\dfrac{W}{\therefore \forall x\ W}$	x er ikke fri i noen premiss som W avhegner av W inneholder ikke noen konstant innført ved bruk av EI på en formel der x er fri

Eksempel: La a og b være konstanter mens x, y, z, v, w er variabler, og la videre W og t være

$$\forall z\ (P(z) \rightarrow \exists w\ (R(z,w) \wedge R(z,x) \wedge \forall y\ R(y,w) \wedge \forall x\ R(w,x))) \quad \text{og} \quad f(a, g(y, f(b,v), f(y,v))).$$

Betingelsen i de to første reglene kan leses slik:

1. Finn alle kvantorer i W som har skop som inneholder frie forekomster av x. (Vi får i dette tilfellet $\forall z$ og $\exists w$.) Finn mengden av variabler som brukes i disse kvantorene. (Vi får i dette tilfellet $\{z, w\}$.)
2. Finn mengden av variabler som forekommer i t. (Vi får i dette tilfellet $\{y, v\}$.)
3. Kontroller at de to mengdene ikke har felles elementer. (OK i dette tilfellet.)

Et lovlig bevis

(Siste kolonne angir hvilke premisser hver linje avhenger av.)

1	$\forall x\ \forall y\ (R(x,y) \to R(y,x))$	P	1
2	$\forall y (R(x,y) \to R(y,x))$	1,UI	1
3	$\exists y\ R(x,y)$	P	3
4	$R(x,c)$	3,EI	3
5	$R(x,c) \to R(c,x)$	2,UI	1
6	$R(c,x)$	4,5,MP	1,3
7	$\exists y\ R(y,x)$	6,EG	1,3
8	$\exists y\ R(x,y) \to \exists y\ R(y,x)$	3,7,CP	1
9	$\forall x (\exists y\ R(x,y) \to \exists y\ R(y,x))$	8,UG	1
10	$\forall x\ \forall y\ (R(x,y) \to R(y,x)) \to \forall x (\exists y\ R(x,y) \to \exists y\ R(y,x))$	1,9,CP	

Alle betingelser er oppfylt:

- UI i linje 2 er OK. (Mengdene for "W" og "t" er her $\{y\}$ og $\{x\}$, som ikke har felles elementer.)
- EI i linje 4 er OK fordi c ikke forekommer før linje 4, og fordi c ikke forekommer i linje 10.
- UI i linje 5 er OK. (Mengdene for "W" og "t" er i dette tilfellet begge tomme, og har derfor selvsagt ikke felles elementer.)
- EG i linje 7 er OK. (Også her er mengdene for "W" og "t" begge tomme.)
- UG i linje 9 er OK, siden x ikke forekommer fri i linje 1 (det vil si premisset som 8 avhenger av) **og** fordi linje 8 ikke inneholder noen konstant innført ved hjelp av EI.
(Men OBS: Denne anvendelsen av UG er ikke OK slik boken har formulert det. Det bryr vi oss ikke om—boken tar feil.)

Noen ulovlige bevis

1	$\forall x\ \exists y\ x < y$	P	1	Ulovlig bruk av UI i linje 2: For x settes inn y, som “fanges inn” av $\exists y$.
2	$\exists y\ y < y$	1,UI	1	

1	$\forall y\ y \leq y$	P	1	Ulovlig bruk av EG i linje 2: Formelen i linje 1 svarer til at vi for x har satt inn y, som “fanges inn” av $\forall y$.
2	$\exists x\ \forall y\ y \leq x$	1,EG	1	

1	$\exists x\ P(x) \wedge \exists y\ R(y)$	P	1	Ulovlig bruk av EI i linje 5: Konstanten c forekommer ovenfor.
2	$\exists x\ P(x)$	1,Simp	1	
3	$\exists y\ R(y)$	1,Simp	1	
4	$R(c)$	3,EI	1	
5	$P(c)$	2,EI	1	
6	$P(c) \wedge R(c)$	4,5,Conj	1	
7	$\exists x\ (P(x) \wedge R(x))$	6, EG	1	

1	$\exists x\ P(x)$	P	1	Ulovlig bruk av EI: Konstanten c forkommer i konklusjonen, det vil si linje 3.
2	$P(c)$	1,EI	1	
3	$\exists x\ P(x) \rightarrow P(c)$	1,2,CP		

1	$P(x)$	P	1	Ulovlig bruk av UG i linje 3: x er fri i premisset 1, som linje 2 (og 3) avhenger av.
2	$P(x) \vee R(x)$	1,Add	1	
3	$\forall x\ (P(x) \vee R(x))$	2,UG	1	
4	$P(x) \rightarrow \forall x\ (P(x) \vee R(x))$	1,3,CP		

1	$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$	P	1	Ulovlig bruk av UG i linje 4: Linje 3 inneholder konstanten c, som ble innf?rt ved EI i en formel der x er fri.
2	$\exists y\ R(x,y)$	1,UI	1	
3	$R(x,c)$	2,EI	1	
4	$\forall x\ R(x,c)$	3,UG	1	
5	$\exists y\ \forall x\ R(x,y)$	4,EG	1	