HUMIT 1750 Høsten 2005

Løsningsforslag med utfyllende kommentarer til Obligatorisk oppgave 1

Vi hadde gitt de tre setningene

A: Regntøyet er hjemme eller i barnehagen.

B: Hvis det er lørdag, er regntøyet ikke i barnehagen.

C: Hvis det er lørdag, er regntøyet hjemme .

Oppgave 1. A inneholder en forekomst av *eller*, men denne svarer ikke direkte til et utsagnslogisk konnektiv. Forklar hvorfor, og omformuler (fremdeles på norsk) A på en måte slik at *eller* knytter sammen to fullstendige setninger.

Svar. *Eller* kan på norsk (som på mange andre språk) knytte samen setningsledd av mange forskjellige typer. Konnektivet $\vee$ svarer bare til en bestemt bruk av dette ordet, nemlig når det knyter samen hele setninger til nye hele setninger. Setningen A har strukturen

Regntøyet er (hjemme eller (i barnehagen))

der *eller* altså knytter sammen *hjemme* med *i barnehagen*. Vi får imidlertid en ekvivalent setning ved å flytte *eller* lenger ut, slik:

(Regntøyet er hjemme) eller (regntøyet er i barnehagen).

Her kombineres to hele setninger, og denne bruken svarer til konnektivet $\vee$.

Oppgave 2. Oversett deretter A,B,C til utsagnslogikk.

Svar. A: Regntøyet er hjemme eller regntøyet er i barnehagen. $(P \vee Q)$
B: Hvis det er lørdag, er regntøyet ikke i barnehagen. $(R \rightarrow \neg Q)$
C: Hvis det er lørdag, er regntøyet hjemme . $(R \rightarrow P)$

Oppgave 3. Vis ved hjelp av sannhetsverditabeller **og** ved hjelp av Quines metode at $A \wedge B \rightarrow C$ er en tautologi.

Svar. Tabellen finner vi ved å gå hit, trykke på den grå knappen merket *Start Truth Table Constructor* nede til høyre, og mate inn

(PvQ)&(R=>~Q) => (R => P)

Quines metode beskrives på de neste sidene.

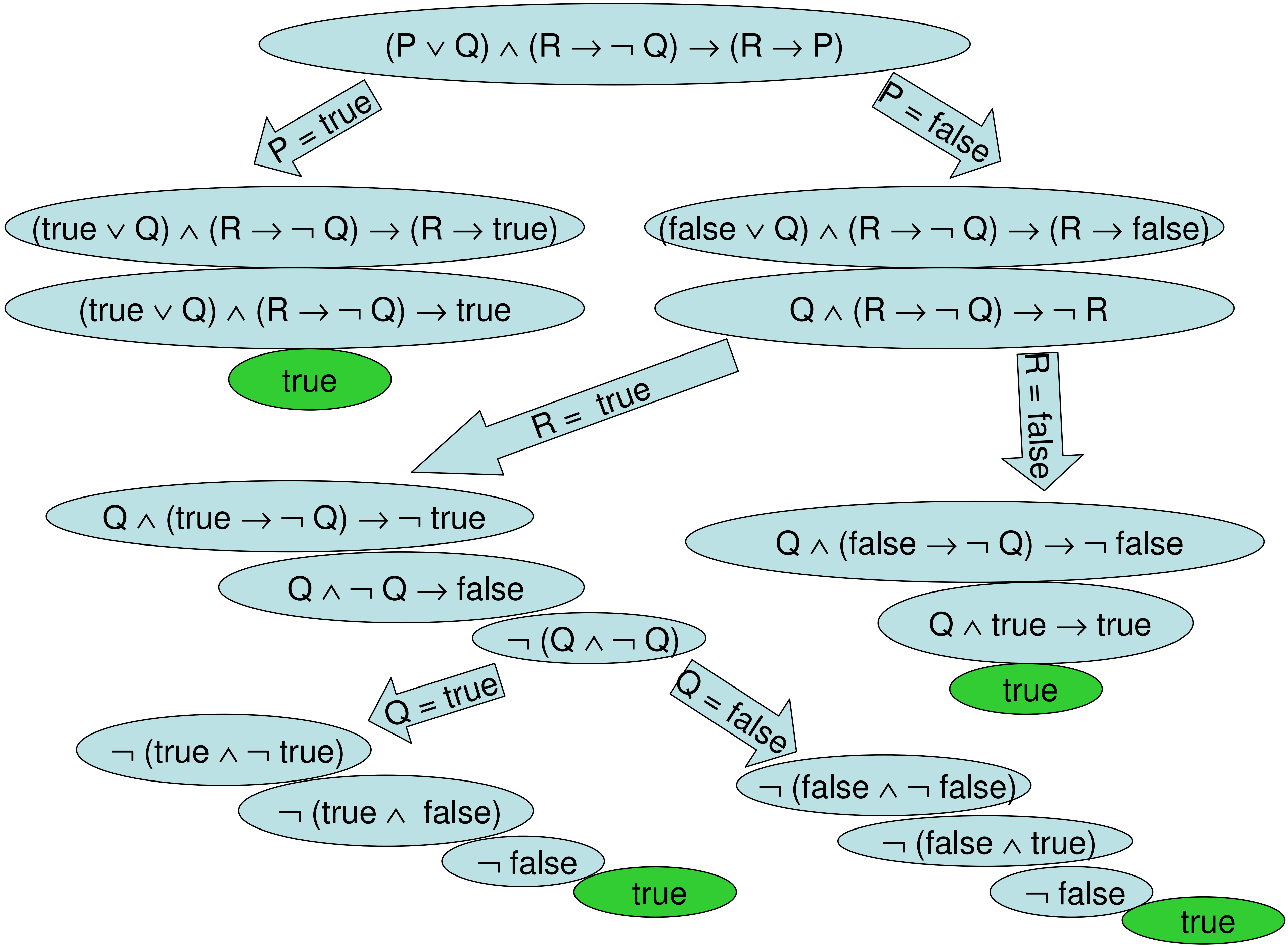
QUINES METODE

tar utgangspunkt i at A er en tautologi hvis og bare hvis både A(P/true) og A(P/false) er tautologier.

Vi kan derfor undersøke om noe er en tautologi ved å sette inn på denne måten (kanskje flere ganger) og dessuten (underveis) forenkle ved hjelp av ekvivalensene

false $\rightarrow$ A $\equiv$ true	true $\rightarrow$ A $\equiv$ A	A $\rightarrow$ false $\equiv$ $\neg$ A	A $\rightarrow$ true $\equiv$ true
false $\vee$ A $\equiv$ A	true $\vee$ A $\equiv$ true	A $\vee$ false $\equiv$ A	A $\vee$ true $\equiv$ true
false $\wedge$ A $\equiv$ false	true $\wedge$ A $\equiv$ A	A $\wedge$ false $\equiv$ false	A $\wedge$ true $\equiv$ A
$\neg$ false $\equiv$ true	$\neg$ true $\equiv$ false		

Formelen er en tautologi hvis og bare hvis vi til slutt ender opp med bare true i alle alternativene vi undersøker.


(P ∨ Q) ∧ (R → ¬ Q) → (R → P)
P = true
P = false
(true ∨ Q) ∧ (R → ¬ Q) → (R → true)
(true ∨ Q) ∧ (R → ¬ Q) → true
true
(false ∨ Q) ∧ (R → ¬ Q) → (R → false)
Q ∧ (R → ¬ Q) → ¬ R
R = true
R = false
Q ∧ (true → ¬ Q) → ¬ true
Q ∧ ¬ Q → false
¬ (Q ∧ ¬ Q)
Q = true
Q = false
¬ (true ∧ ¬ true)
¬ (true ∧ false)
¬ false
true
¬ (false ∧ ¬ false)
¬ (false ∧ true)
¬ false
true
Q ∧ (false → ¬ Q) → ¬ false
Q ∧ true → true
true

Oppgave 4. (Første del.) $A \wedge C \rightarrow B$ er derimot **ikke** en tautologi. Vis også dette både ved hjelp av sannhetsverditabeller og Quines metode.

Svar. Tabellen finner vi ved å gå hit, trykke på den grå knappen merket *Start Truth Table Constructor* nede til høyre, og mate inn

(PvQ)&(R => P) => (R=>~Q)

Quines metode beskrives på neste side.

Oppgave 4. (Andre del).
Finn disjunktiv og konjunktiv normalform av $A \wedge C \rightarrow B$.

Svar:.

$(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$

$\neg((P \vee Q) \wedge (\neg R \vee P)) \vee \neg R \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg R \vee P) \vee \neg R \vee \neg Q$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg P) \vee \neg R \vee \neg Q$

Dette er DNF

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee \neg R \vee \neg Q$

$(\neg P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee \neg R \vee \neg Q$

$(\neg P \vee \neg R \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg R \vee \neg Q)$

Dette er CNF

$\neg P \vee \neg R \vee \neg Q$

Dette også

Dette også

$(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$

$P = \text{true}$

$(\text{true} \vee Q) \wedge (R \rightarrow \text{true}) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$

$\text{true} \wedge \text{true} \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$

$\text{true} \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$

$R \rightarrow \neg Q$

$R = \text{true}$

$\text{true} \rightarrow \neg Q$

$\neg Q \xrightarrow{Q\, =\, \text{true}} \neg\, \text{true}$ $\quad$ false

Siden denne stien leder til false, trenger vi ikke utforske de andre:

Formelen er uansett ikke en tautologi.

Oppgave 5.

Ved å innføre en veldig rimelig ekstra betingelse D, kan vi imidlertid få at $A \wedge C \wedge D \rightarrow B$ er en tautologi. Formuler en slik D på norsk, oversett den til utsagnslogikk, og vis at vi nå får en tautologi.

Svar La D være

Regntøyet er ikke både hjemme og i barnehagen,

altså

Det er ikke slik at regntøyet er hjemme og regntøyet er i barnehagen.

Oversatt til utsagnslogikk blir dette $\neg (P \wedge Q)$, og $A \wedge C \wedge D \rightarrow B$ blir

$$(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow P) \wedge \neg (P \wedge Q) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$$

som har denne sannhetsverditabellen.