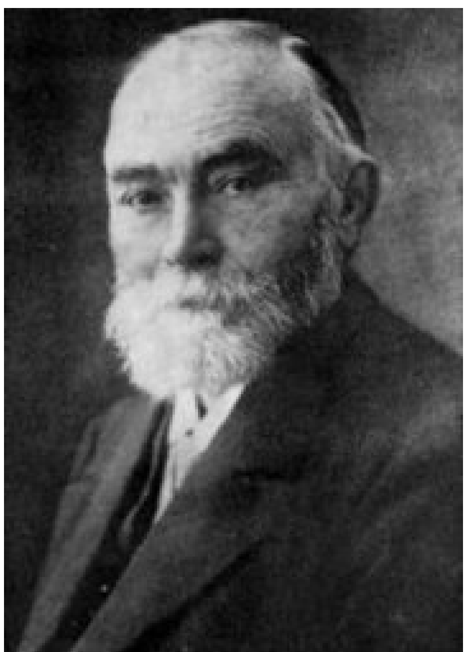
George Boole (1815-1864)

“Oppfant” utsagnslogikk”



Gottlob Frege (1848-1925)

Ga den første aksiomatisering av utsagnslogikk.

(Oppfant dessuten predikatlogikk og mye annet, og regnes som den moderne logikks far.)

Freges aksiomer
(for implikasjon og negasjon)

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

$\neg\neg A \rightarrow A$

$A \rightarrow \neg\neg A$

Pluss én slutningsregel: Modus Ponens.

Frege /Łukasiewicz- aksiomene

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

$\neg\neg A \rightarrow A$

$A \rightarrow \neg\neg A$

$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Versjon for $\rightarrow$ og false

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$((A \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}) \rightarrow A$

Bevis-eksempel

1	$(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$	A2
2	$A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A$	A1
3	$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	1,2,MP
4	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	A1
5	$A \rightarrow A$	3,4,MP

Bevis fra premiss(er)

1	$Q \rightarrow R$	P
2	$(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A1
3	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	1,2,MP
4	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$	A1
5	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	3,4,MP

Vi oppsummerer dette ved å skrive

$$Q \rightarrow R \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

Deduksjonsteoremet

- Hvis $A \vdash B$, så $\vdash A \rightarrow B$

- Altså: Siden

$$Q \rightarrow R \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

gjelder også

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Bevis for B fra A omgjøres til bevis for A → B ved å legge til " A → " til venstre på hver linje i opprinnelige beviset, og så legge til nye linjer:

1	$(Q \to R) \to (Q \to R)$	P	T
2--	$(Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$		A1
2-	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R))) \to ((Q \to R) \to ((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$		A1
2	$((Q \to R) \to ((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	A1	2--,2-,MP
3--	$((Q \to R) \to ((Q \to R) \to (P \to (Q \to R))))$ $\to (((Q \to R) \to (Q \to R)) \to ((Q \to R) \to (P \to (Q \to R))))$		A2
3-	$((Q \to R) \to (Q \to R)) \to ((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$		2,3--,MP
3	$(Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$	1,2,MP	1,3-,MP
4--	$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$		A2
4-	$((P\to (Q\to R))\to ((P\to Q)\to (P\to R)))$ $\to ((Q \to R) \to ((P\to (Q\to R))\to ((P\to Q)\to (P\to R))))$		A1
4	$(Q \to R) \to ((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	A2	4--,4-,MP
5--	$((Q \to R) \to ((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))))$ $\to (((Q \to R) \to (P \to (Q \to R))) \to ((Q \to P) \to ((P \to Q) \to (P \to R))))$		A2
5-	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R))) \to ((Q \to P) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$		4,5--,MP
5	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	3,4,MP	3,5-,MP

Deduksjonsteoremet, generell form

Hvis

$$A1, A2, \ldots, An \vdash B,$$

så $$A1, A2, \ldots An\text{-}1 \vdash An \rightarrow B$$