Logisk ekvivalens

Vi sier at formlene A og B er ***ekvivalente***

og skriver $A \equiv B$

hviss

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ er gyldig

dvs. A og B har samme sannhetsverdi i alle tolkninger.

Substituerbarhet av ekvivalente formler

Hvis A og B er ekvivalente,
kan vi sette inn B for A i en større formel C uten å endre C's sannhetsverdi i noen tolkning:

Hvis $A \equiv B$ ***så*** $C \equiv C(A/B)$

Eksempel

Siden $$R(a,x) \rightarrow R(x,a) \equiv \neg R(a,x) \vee R(x,a)$$

har vi også $$\neg (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \neg (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$$

og $$\forall x\ (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \forall x\ (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$$

og $$\exists x\ (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \exists x\ (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$$

etc, etc, etc,…..

(Vi har allerede resonert på denne måten lenge…)

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Kjenner fra utsagnslogikk:

$$A \vee (B_1 \wedge B_2) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge B_5) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4) \wedge (A \vee B_5)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge B_5 \wedge B_6) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4) \wedge (A \vee B_5) \wedge (A \vee B_6)$$

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Kjenner fra utsagnslogikk:

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c) \wedge B(x/d)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c)) \wedge (A \vee B(x/d))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c) \wedge B(x/d) \wedge B(x/e)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c)) \wedge (A \vee B(x/d)) \wedge (A \vee B(x/e))$$

Hvis A ikke inneholder frie forekomster av x, gir dette for domener I =

{a}, {a,b}, {a,b,c}, {a,b,c,d}, etc:

$$A \vee \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \vee B)$$

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Tilsvarende korrespondanse mellom

$$A \wedge (B_1 \vee B_2) \quad \equiv \quad (A \wedge B_1) \vee (A \wedge B_2)$$

og følgende, når A ikke inneholder frie forekomster av x:

$$A \wedge \exists x\, B \quad \equiv \quad \exists x\, (A \wedge B)$$

Disse og noen liknende ekvivalenser som vi nå skal se på, tillater oss å skrive enhver formel om til en ekvivalent formel på prenex normalform. (Definisjon følger)

Og til prenex disjunktiv normalform, og til prenex konjunktiv normalform, som også må defineres….