Kompletthetsteoremet

Hvis A er en tautologi,

så finnes et bevis for A

Hvis A er tautologi,

så $\vdash A$

Hjelperesultat

Hvis Q1,Q2 ,… ,Qn “beskriver” en linje i en sannhetsverditabell som gjør A sann, da har vi $Q1,Q2 ,\ldots ,Qn \vdash A$

Hvis Q1,Q2 ,… ,Qn “beskriver” en linje i en sannhetsverditabell som gjør A gal, da har vi $Q1,Q2 ,\ldots ,Qn \vdash \neg A$

Eksempel

P	R	$(P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$
true	true	false
true	false	true
false	true	true
false	false	false

$P, \quad R \quad \vdash \quad \neg((P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P))$

$P, \quad \neg R \quad \vdash \quad (P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$

$\neg P, \quad R \quad \vdash \quad (P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$

$\neg P, \quad \neg R \quad \vdash \quad \neg((P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P))$

Bevis for hjelperesultatet

Vi argumenterer ut fra oppbygningen av formler:

Først "Basis"

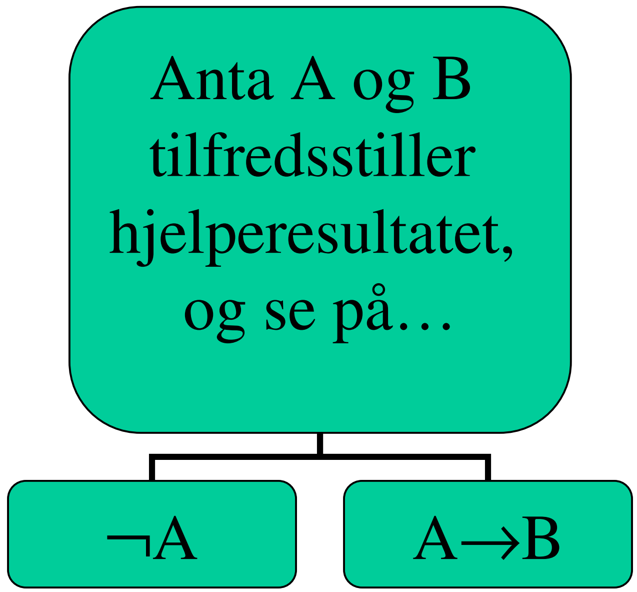
Sjekker at det gjelder for de enkleste formlene, dvs. utsagnsvariablene:

$P \vdash P \qquad \neg P \vdash \neg P \qquad R \vdash R \qquad \neg R \vdash \neg R$

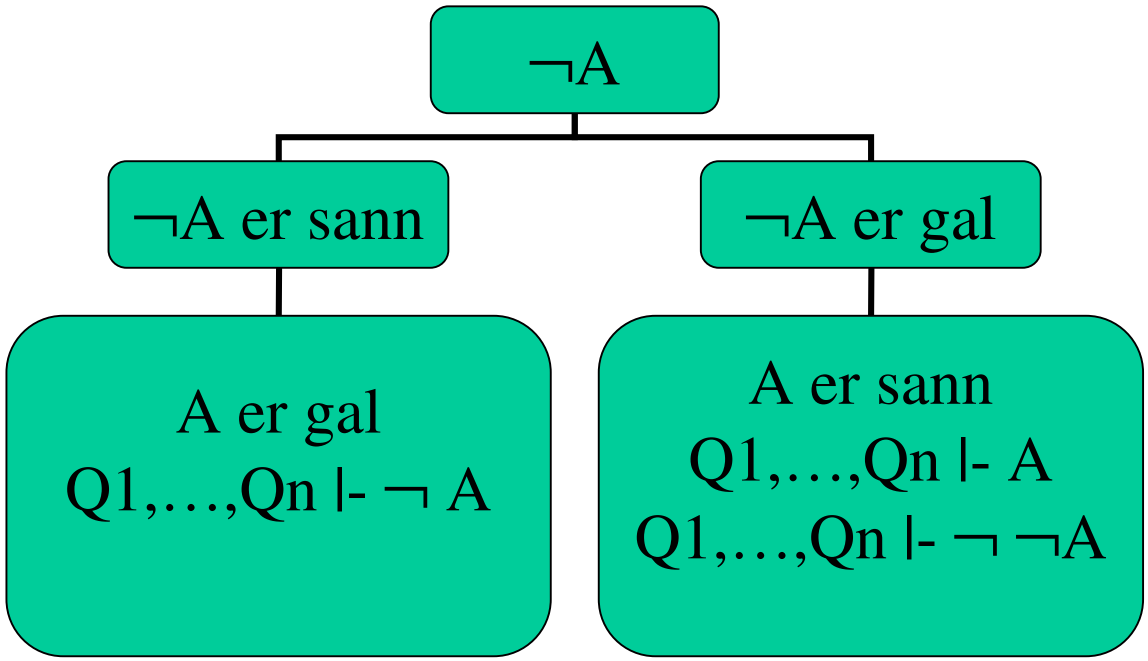
og så "Induksjon"

Sjekker at større formler "arver" dette fra de mindre formlene de er bygget opp fra.

Induksjon



¬A er enten sann eller gal i linjen (i sannhetsverditabellen)
som Q1,…,Qn beskriver:



|- A → ¬ ¬A

A→B er enten sann eller gal i linjen (i sannhetsverditabellen) som Q1,…,Qn beskriver:

- A→B
  - A→B er sann
    - A er gal
Q1,…,Qn |- ¬ A
Q1,…,Qn |- A→B
    - B er sann
Q1,…,Qn |- B
Q1,…,Qn |- A→B
  - A→B er gal
    - A er sann og B er gal
Q1,…,Qn |- A
Q1,…,Qn |- ¬B
Q1,…,Qn |- ¬ (A→B)

|- ¬ A → (A → B)

|- B → (A → B)

|- A → (¬B → ¬(A → B)

QED (for hjelperesultatet)

Kompletthetsteoremet følger nå ved…

- Hjelperesultatet,
- Deduksjonsteoremet, og..
- $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$

De to siste kombineres slik:

$Q1, \ldots Qn\text{-}1, P \vdash W$ gir ved dt. $Q1, \ldots Qn\text{-}1 \vdash P \to W$

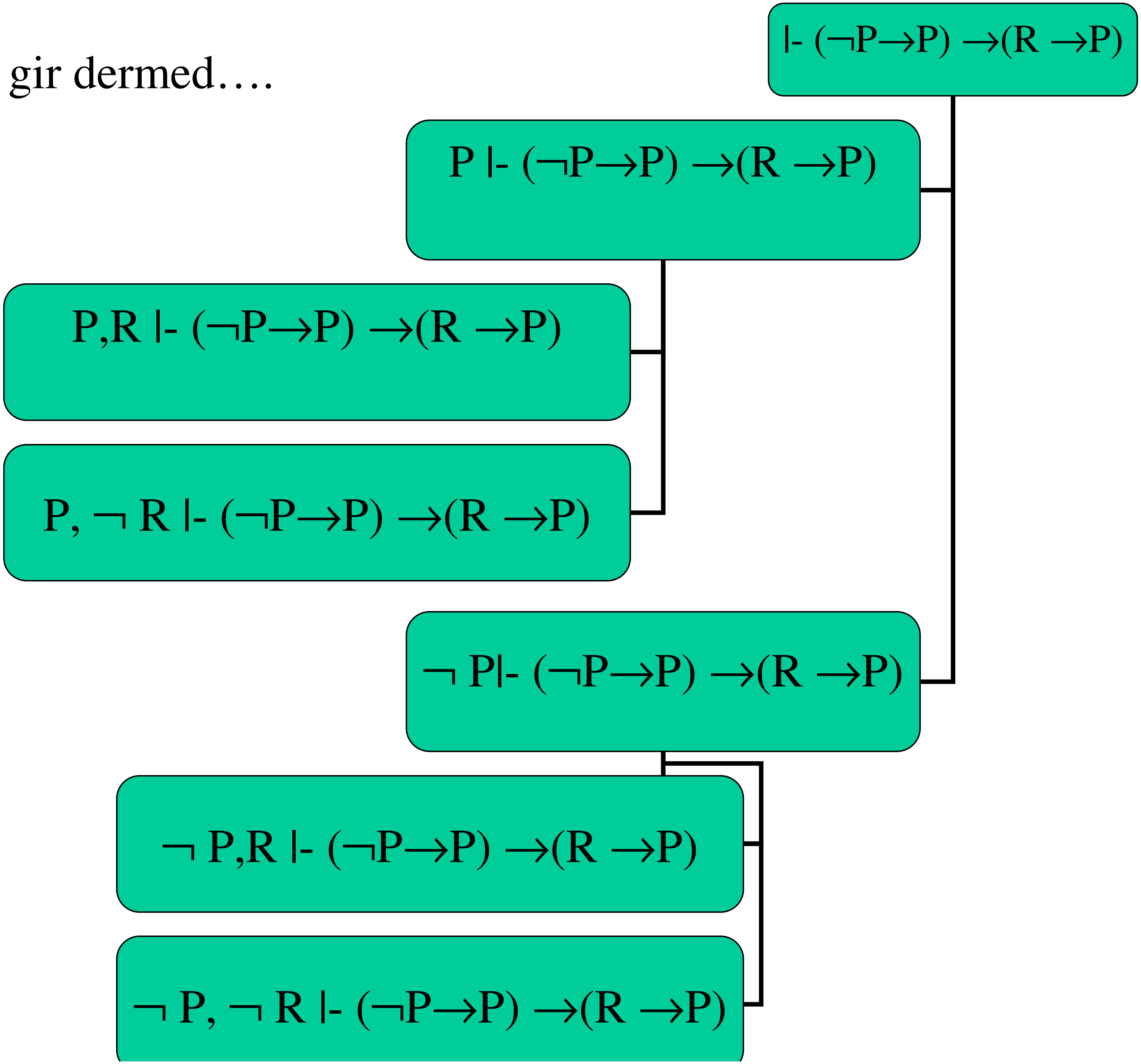
$Q1, \ldots Qn\text{-}1, \neg P \vdash W$ gir ved dt. $Q1, \ldots Qn\text{-}1 \vdash \neg P \to W$

$\vdash (P \to W) \to ((\neg P \to W) \to W))$

$Q1, \ldots Qn\text{-}1 \vdash (\neg P \to W) \to W$

$Q1, \ldots Qn\text{-}1 \vdash W$

og gir dermed….



QED (for kompletthetsteoremet)

Oppsummering

Frege-Lukasiewicz-systemet er altså komplett fordi det (i tillegg til MP) inneholder nok til å gi oss..

Deduksjonsteoremet og $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$

og dessuten teoremer som definerer/bestemmer oppførselen til Konnektivene:

$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$

$\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

For å utvide systemet til også å takle andre konnektiver, vil vi da trenge noe som gir oss

- For konjunksjon:

|- $A \rightarrow (B \rightarrow (A \land B))$
|- $\neg A \rightarrow \neg(A \land B)$
|- $\neg B \rightarrow \neg(A \land B)$

- For disjunksjon:

|- $A \rightarrow (A \lor B)$
|- $B \rightarrow (A \lor B)$
|- $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \lor B))$

- For true og false

|- true
|- $\neg$ false

Så et annet system, Hilbert-Ackermann, med MP og aksiomene

- $A \vee A \to A$
- $A \to A \vee B$
- $A \vee B \to B \vee A$
- $(A \to B) \to (C \vee A \to C \vee B)$

… også komplett

Men obs: Formler er her bygget opp fra konnektivene $\vee$ og $\neg$.

$A \rightarrow B$ er bare en pen skrivemåte for $(\neg A \vee B)$, og aksiomene ser egentlig slik ut:

- $\neg (A \vee A) \vee A$
- $\neg A \vee (A \vee B)$
- $\neg (A \vee B) \vee (B \vee A)$
- $\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg (C \vee A) \vee (C \vee B))$

Hva så med systemet for naturlig deduksjon i avsnitt 6.3? Også komplett?

Systemet (for konnektivene $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$, false, true) med følgende regler er komplett:

- MP
- CP
- Alle regler i boksen side 371, inkludert “speilbildene” av Simp, Add og DS, altså versjonene av disse med $(B \vee A)$ i stedet for $(A \vee B)$ og $(B \wedge A)$ i stedet for $(A \wedge B)$.
- Og dessuten

$$\frac{A \vee A}{\therefore\ A} \qquad \frac{}{\therefore\ A \vee \neg A} \qquad \frac{}{\therefore\ \text{true}} \qquad \frac{\text{false}}{\therefore\ A}$$