

Partiell funksjon F fra \mathbb{N} til \mathbb{N} er Turing-beregnbar hvis og bare hvis...

det finnes en turingsmaskin som, for hvert tall $n \geq 0$, oppfører slik når den startes med input 1^n :

- den vil til slutt stoppe hviss $F(n)$ er definert, og
- i så fall stopper den med output $1^{F(n)}$.

Partiell funksjon fra N til N er

hviss den er

Turing-beregnbar

partielt rekursiv

hviss den kan

beregnes av en ubegrenset
registermaskin

hviss den er

Turings tese

“beregnerbar”



Primitivt rekursive funksjoner:

er definert fra de tre funksjonene

- $zero(x) = 0$
- $succ(x) = x+1$
- $project_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$
- $zero(4) = 0$
- $succ(4) = 5$
- $project_2(4, 8, 12) = 8$
- $id(x) = project_1(x) = x$

ved (muligens gjentatt) bruk av

- sammensetning
- primitiv rekursjon:
- $plus3(x) = succ(succ(succ(x)))$
- $succ_2(x,y) = succ(project_2(x,y))$

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = h(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, succ(y)) = g(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, y))$$

$succ_2(x, plus(x,y))$

$$plus(x, 0) = id(x) = x$$

$$plus(x, succ(y)) = succ(plus(x, y))$$

$$\text{mult}(x,0) = \text{zero}(x) = 0$$

$$\text{mult}(x,\text{succ}(y)) = \text{pluss}(x,(\text{mult}(x,y)))$$

$$\text{pred}(0) = \text{zero}(x) = 0$$

$$\text{pred}(\text{succ}(y)) = y$$

$$\text{monus}(x,0) = x$$

$$\text{monus}(x,\text{succ}(y)) = \text{pred}(\text{monus}(x,y))$$

$$\text{not}(x) = \text{monus}(\text{succ}(\text{zero}(x)), x)$$

$$\text{geq}(x, y) = \text{not}(\text{monus}(y, x))$$

$$\text{eq}(x, y) = \text{mult}(\text{geq}(x, y), \text{geq}(y, x))$$

Slike funksjoner kan bli partielle,
det vil si udefinert for noen argumenter.

Partielt rekursive funksjoner:

er definert fra zero, succ og alle project_i
ved (muligens gjentatt) bruk av

- sammensetning
- primitiv rekursjon
- “ubegrenset søk”

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min(y, g(x_1, \dots, x_n, y)) = 0$$

$$\text{div}(x, z) = \min(y, \text{not}(\text{eq}(\text{mult}(z, y), x))) = 0$$



Men det finnes partielt rekursive funksjoner som er totale, og samtidig ikke primitivt rekursive:

- Ackermanns funksjon:
- $A(0,y) = \text{succ}(y)$
- $A(\text{succ}(x),0) = A(x,\text{succ}(0))$
- $A(\text{succ}(x),\text{succ}(y)) = A(x,A(\text{succ}(x),y))$



Ubegrenset registermaskin (Variant i lærebok)

```
I := succ(Y); I := pred(I);  
while I≠0 do  
  X := succ(X); I := pred(I)  
od
```


Endelige

Regulære

Kontekstfrie

Kontekstsensitive

Rekursive

Rekursivt opptellbare

