Enhver frosk kysser en prinsesse som alle riddere elsker

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

Hver kvantor har en rekkevidde/***skop.***

Dette er den delen av formelen som den virker på.

Kvantorer ***binder*** forekomster av variabler i sitt skop, men ikke alle:

En forekomst av en variabel kan stå i skopet til flere kvantorer, men er bare bundet av en av dem, nærmere bestemt av den med rett variabel som har minst skop. (x i $\forall x$ er også bundet av $\forall x$.)

Variabelforekomster som ikke er bundet, er ***frie***.

$$\forall x\ (F(x) \rightarrow \exists y\ (P(y) \land K(x,y) \land \forall x\ (R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

$$\forall x\ (F(x) \rightarrow \exists y\ (P(y) \land K(x,y) \land \forall z\ (R(z) \rightarrow E(z,y))))$$

Substitusjon

- A(x/a) er resultatet av å sette inn a for alle frie forekomster av x i A.

$$(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \land K(x,y) \land \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))\,(x/a)$$

$$= (F(a) \rightarrow \exists y\,(P(y) \land K(a,y) \land \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

Sannhet av formler defineres i forhold til tolkninger.

$\forall x$ A er sann i tolkningen I med domenet D

hviss

A(x/a) er sann (i I) for alle a i D.

$\exists x$ A er sann i tolkningen I med domenet D

hviss

A(x/a) er sann (i I) for en a i D.

$$I \models A$$

I gjør A sann

A er sann i tolkningen I

Når I er tolkning med domene D:

$$I \models \forall x\, A$$

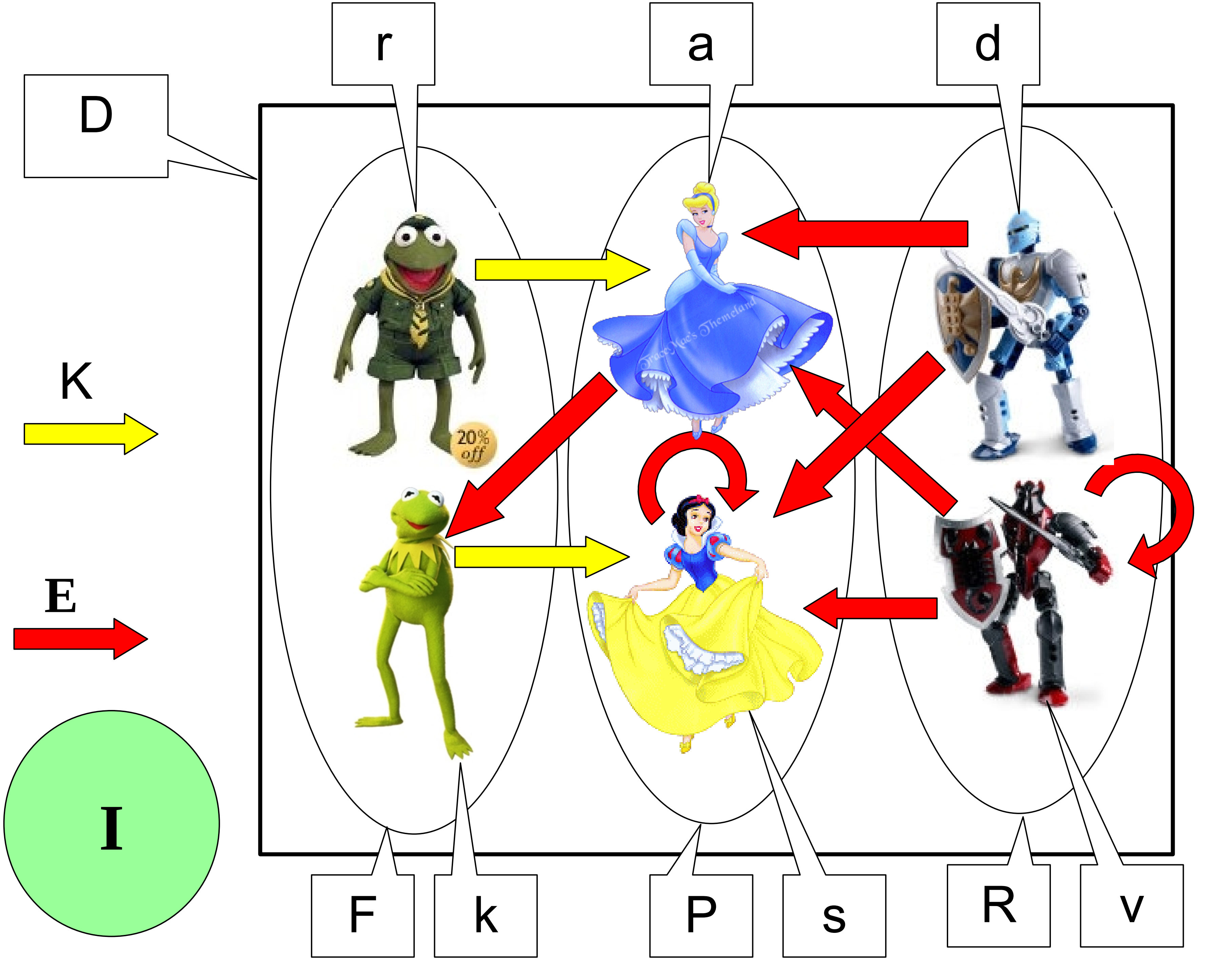
hviss

$I \models A(x/a)$ for alle a i D

$$I \models \exists x\, A$$

hviss

$I \models A(x/a)$ for (minst) en a i D



r
a
d
D
K
E
I
F
k
P
s
R
v

$$I \models \forall x\,(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

hviss

$$I \models F(r) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(r,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))) \text{ og}$$

$$I \models F(a) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(a,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))) \text{ og}$$

$$I \models F(d) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(d,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))) \text{ og}$$

$$I \models F(k) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(k,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))) \text{ og}$$

$$I \models F(s) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(s,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))) \text{ og}$$

$$I \models F(v) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(v,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$

$$I \models \exists y\, (P(y) \wedge K(r,y) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,y)))$$

hviss

$I \models P(r) \wedge K(r,r) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,r))$ eller

$I \models P(a) \wedge K(r,a) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,a))$ eller

$I \models P(d) \wedge K(r,d) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,d))$ eller

$I \models P(k) \wedge K(r,k) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,k))$ eller

$I \models P(s) \wedge K(r,s) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,s))$ eller

$I \models P(v) \wedge K(r,v) \wedge \forall x\, (R(x) \rightarrow E(x,v))$

$$I \models \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,a))$$

hviss

$$I \models R(r) \rightarrow E(r,a) \quad \text{og}$$

$$I \models R(a) \rightarrow E(a,a) \quad \text{og}$$

$$I \models R(d) \rightarrow E(d,a) \quad \text{og}$$

$$I \models R(k) \rightarrow E(k,a) \quad \text{og}$$

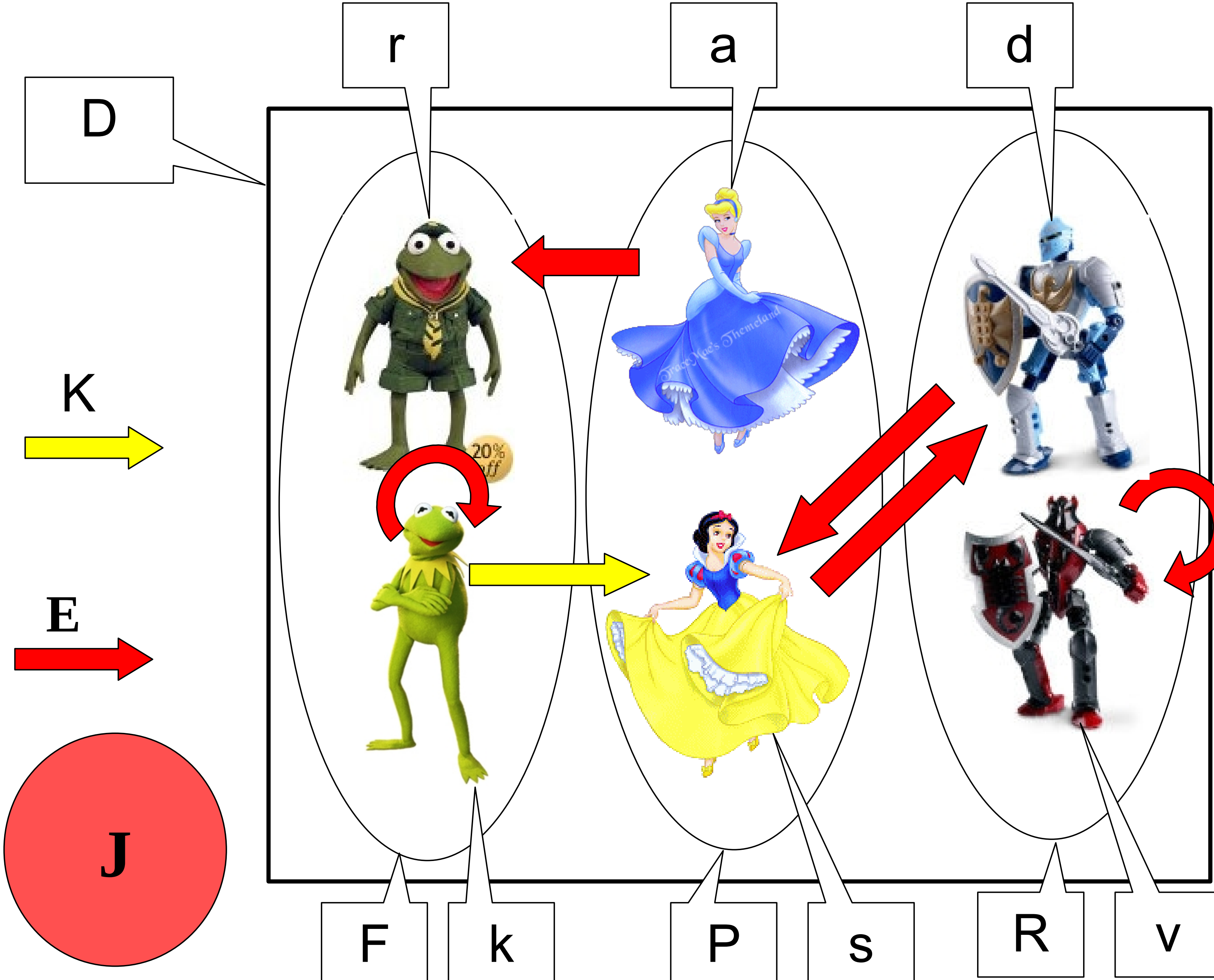
$$I \models R(s) \rightarrow E(s,a) \quad \text{og}$$

$$I \models R(v) \rightarrow E(v,a)$$

Modell/motmodell

- Hvis A er sann i en tolkning, sier vi at tolkningen er en ***modell*** for A.

- Hvis A er gal i en tolkning, sier vi at tolkningen er en ***motmodell*** for A.



r
a
d
D
K
E
J
F
k
P
s
R
v

Gyldig formel (Valid wwf)

- Vanligvis er en formel sann i noen tolkninger og gal i noen tolkninger, men noen formler er gyldige; det vil si at de er sanne i alle tolkninger.
- En formel er altså gyldig hviss den ikke har noen motmodell
- Eksempler er alle tautologier, men vi har mer.

Noen gyldige formler

$\forall x \, \neg A \rightarrow \neg \exists x \, A$

$\exists x \, \neg A \rightarrow \neg \forall x \, A$

$\forall x \, (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x \, A \rightarrow \forall x \, B)$

$\forall x \, A \wedge \forall x \, B \rightarrow \forall x \, (A \wedge B)$

$\exists x \, (A \vee B) \rightarrow \exists x \, A \vee \exists x \, B$

$\forall x \, \forall y \, A \rightarrow \forall y \, \forall x \, A$

$\exists x \, \forall y \, A \rightarrow \forall y \, \exists x \, A$

Oppfyllbar (satisfiable) formel

- En formel oppfyllbar hviss den er sann i minst en tolkning.

- En formel er altså oppfyllbar hviss den har en modell

Åpen formel

- Formler med frie variabler kalles **åpne**.
- Åpne formler er vanskelige å tolke som klare påstander – deres betydning er ennå “åpen”. De tolkes lettere som mengder/relasjoner, for eksempel mengden av dem som kysser prinsesser: $\exists y\,(\mathrm{Prinsesse}(y) \wedge \mathrm{Kysser}(x,y))$
- Åpne formler regnes ofte som ”annenrangs” eller et nødvendig onde; prøv for eksempel å mate en formel med frie variabler til denne teorembeviseren. (Du får feilmelding!)

Lukket formel

- En lukket formel er en formel uten frie variabler.
- Vi har to viktige måter å lukke formler på, det vil si måter å gjøre åpne formler om til lukkete formler.
- Dette er universell og eksistensiell tillukning.

$\exists x \exists y \exists z\ (Prinsesse(z) \land Elsker(x,z) \land Elsker(y,z))$

Eksistensiell tillukning

$\exists z\ (Prinsesse(z) \land Elsker(x,z) \land Elsker(y,z))$

Universiell tillukning

$\forall x \forall y \exists z\ (Prinsesse(z) \land Elsker(x,z) \land Elsker(y,z))$

En formel er gyldig hviss dens universelle tillukning er det.

En formel er oppfyllbar hviss dens eksistensielle tillukning er det.