# Prenex normalform

- En formel er i ***prenex normalform*** hvis den kan skrives som en streng av kvantorer etterfulgt av en kvantorfri del.
- Disse to delene omtales henholdsvis som kvantor-prefikset og matriks.

$$\forall v\ \exists w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ ((P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow (R(x,w) \rightarrow R(v,z) \land P(y)))$$

# Prenex disjunktiv normalform

- En formel er i ***prenex disjunktiv normalform*** hvis den er i prenex normalform, med matriks i disjunktiv normalform.

$$\forall v\, \exists w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, ((P(x) \land \neg P(y)) \lor \neg R(x,w) \lor (R(v,z) \land P(y)))$$

# Prenex konjunktiv normalform

En formel er i ***prenex konjunktiv normalform*** hvis den er i prenex normalform, med matriks i konjunktiv normalform.

$$\forall v\ \exists w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (\ (P(x) \lor \neg R(x,w) \lor R(v,z)) \land$$
$$(P(x) \lor \neg R(x,w) \lor P(y)) \land$$
$$(\neg P(y) \lor \neg R(x,w) \lor R(v,z)))$$

# Omskriving til prenex normalform

Hvilken som helst formel kan skrives om til en ekvivalent formel i prenex normalform.

Dette går i to trinn – først skriver vi om til en kvantor-standardisert formel:

# Kvantor-standardisert

En formel er ***kvantor-standardisert*** hvis

- den ikke inneholder to kvantorer for samme variabel, og dessuten
- hvis den inneholder frie forekomster av en variabel, da inneholder den ikke kvantorer for samme variabel.

(Altså ingen “gjenbruk” av variabler.)

Gjenbruk elimineres ved omdøping av variabler.

# Omdøping av variabler

$$\forall x\, A \equiv \forall y\, A(x/y)$$

$$\exists x\, A \equiv \exists y\, A(x/y)$$

når y ikke forekommer (verken fri eller bundet) i A

Ved gjentatt bruk av dette kan vi skrive om en hvilken som helst formel til en kvantor-standardisert formel.

# Omskriving til prenex normalform

Etter omskrining til kvantor-standardisert from, er neste trinn å flytte alle kvantorer ut.

Dette krever en del ekvivalenser.

# Repetisjon: To viktige ekvivalenser

$$A \wedge (\exists x\, B) \equiv \exists x\, (A \wedge B)$$

$$A \vee (\forall x\, B) \equiv \forall x\, (A \vee B)$$

... og dermed selvfølgelig også

$$(\exists x\, B) \wedge A \equiv \exists x\, (B \wedge A)$$

$$(\forall x\, B) \vee A \equiv \forall x\, (B \vee A)$$

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

PS: Husk at Kvantorene har høy presendens!

# Tilsvarende:

$$A \lor \exists x\, B \quad \equiv \quad \exists x\, (A \lor B)$$

$$A \land \forall x\, B \quad \equiv \quad \forall x\, (A \land B)$$

... og

$$\exists x\, B \lor A \quad \equiv \quad \exists x\, (B \lor A)$$

$$\forall x\, B \land A \quad \equiv \quad \forall x\, (B \land A)$$

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

# Dessuten:

$$\neg\,\exists x\, B \equiv \forall x\, \neg\, B$$
$$\neg\,\forall x\, B \equiv \exists x\, \neg\, B$$

… som kombinert med ekvivalensene for $\vee$ foran gir

$$(\exists x\, B) \rightarrow A \equiv \forall x\, (B \rightarrow A)$$
$$(\forall x\, B) \rightarrow A \equiv \exists x\, (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow \exists x\, B \equiv \exists x\, (A \rightarrow B)$$
$$A \rightarrow \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \rightarrow B)$$

Og kvantorene har altså høy presendens.

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

# Eksempel

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$$

Skrives først om til en kvantor-standardisert formel:_

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$$

Deretter flyttes de to kvantorene ut:

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, P(y))$$

$$\forall x\, \forall y\, (P(x) \rightarrow P(y))$$