- Modellering av atmosfæren -

Anton Brekke / antonabr@uio.no

November 2021

1 Isoterm del av atmosfæren

Denne delen er den enkleste, så vi kan starte med denne. Vi har likningen for hydrostatisk likevekt:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r).$$

Vi starter med å anta at gravitasjonsakselerasjonen g ikke endrer seg alt for mye i atmosfæren. Dette gjør det litt enklere for oss å løse. Vi har også likningen for ideell gasslov:

$$P = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

Der k er Boltzmanns konstant, μ er gjennomsnittlig molekylvekt i atmosfæren, m_H er massen til hydrogen, og T er en konstant temperatur $T = \frac{T_0}{2}$ der T_0 er temperaturen på planetens overflate. Setter vi inn dette uttrykket for trykket P inn i likningen for hydrostatisk likevekt får vi:

$$K_1\frac{d\rho}{dr} = -\rho, \quad K_1 = \frac{kT}{\mu g m_H}$$

Dette er en differenisallikning vi enkelt kan løse:

$$\begin{aligned}
K_1\frac{d\rho}{dr} &= -\rho \\
\frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{dr}{K1} \\
\int\frac{d\rho}{\rho} &= -\int\frac{dr}{K_1} \\
\ln(\rho) &= -\frac{r}{K1} + C \\
\Rightarrow \rho &= e^{-\frac{r}{K_1}}C_0, \quad C_0 = e^C
\end{aligned}$$

Dermed har vi en likning for den isoterme delen av modellen. Men vi har ikke nok informasjon til å bestemme konstanten C_0 enda. Vi har likningen:

$$\rho_{isoterm} = C_0 e^{-\frac{r}{K1}}$$

Trykket kan vi få rett ut fra forholdet i ideell gasslov:

$$P_{isoterm} = \frac{\rho kT}{\mu m_H} = K_1 g C_0 e^{-\frac{r}{K_1}}$$

og temperaturen T er konstant $T_{isoterm} = \frac{T_0}{2}$.

2 Adiabatisk del av atmosfæren

Informasjon og antakelser vi har:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r), \ \ T^\gamma P^{1-\gamma} = A, \ \ P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}, \ \ g(r) = g$$

Likt som sist, men nå med en ekstra likning om adiabatisk forhold mellom trykk og temperatur.
Kjente konstanter og størrelser:

$$T_0, \ \rho_0, \ g, \ \gamma, \ \mu, \ m_H$$

Der T_0 er temperaturen ved overflaten, ρ_0 er tettheten ved overflaten.

Fra ideell gasslov har vi:

$$\rho = \frac{P}{T} \cdot \frac{\mu m_H}{k} = \frac{P}{T} \cdot K_0, \quad K_0 = \frac{\mu m_H}{k}$$

Fra adiabatisk likning:

$$\begin{aligned} T^\gamma P^{1-\gamma} &= A \\ \Rightarrow T \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= A^{\frac{1}{\gamma}} \\ \Rightarrow T &= A^{\frac{1}{\gamma}} P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Setter dette T inn i uttrykket for ρ ovenfor:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{P}{T} \cdot K_0 \\ &= \frac{P}{A^{\frac{1}{\gamma}} P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \cdot K_0 \\ &= P^{1-\frac{\gamma-1}{\gamma}} A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 \\ &= P^{\frac{1}{\gamma}} A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 \end{aligned}$$

$$\rho = P^{\frac{1}{\gamma}} A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0$$

Setter dette uttrykket for ρ inn i uttrykket for hydrostatisk likevekt:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\rho(r)g(r) \\ &= -P^{\frac{1}{\gamma}}A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 g\end{aligned}$$

Flytter alt med P på en side, og alt annet på andre side:

$$P^{-\frac{1}{\gamma}}dP = -A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 g\ dr$$

Integrerer opp på begge sider og flytter konstanter ut:

$$\begin{aligned}\int P^{-\frac{1}{\gamma}}dP &= -A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 g\int dr \\ \frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}P^{1-\frac{1}{\gamma}} &= -A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 gr + C \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= -A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 gr + C \\ \Rightarrow P &= \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\cdot(A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 gr + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (*)\end{aligned}$$

Fra adiabatisk likning har jeg:

$$\begin{aligned}T^{\gamma}P^{1-\gamma} &= A \\ \Rightarrow T &= A^{\frac{1}{\gamma}}P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\end{aligned}$$

Setter inn P fra uttrykket over inn i uttrykket for T fra adiabatisk likning:

$$T = A^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\cdot(A^{-\frac{1}{\gamma}}K_0 gr + C)\right] \qquad (*)$$

Fra ideel gasslov hadde jeg forholdet:

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

Som ga meg uttrykker for ρ:

$$\rho = \frac{P}{T}\cdot\frac{\mu m_H}{k} = \frac{P}{T}\cdot K_0$$

Setter inn uttrykkene for P og T markert med (*) inn i uttrykket for ρ:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{P}{T} K_0 \\
&= \frac{\left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{A^{\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]} \cdot K_0 \\
&= A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}-1} \cdot K_0 \\
&= A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0
\end{aligned}
$$

For å oppsummere, har jeg nå kommet frem til disse tre likningene for P, T og ρ i det adiabatiske mediet:

$$
T_{adiabatisk}(r) = A^{\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]
$$

$$
P_{adiabatisk}(r) = \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
$$

$$
\rho_{adiabatisk}(r) = A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0
$$

Hvor de eneste ukjente konstantene jeg har er A og C. C er den samme konstanten i alle tre likningene, siden den kommer fra samme integrasjon.

3 Konstanter for adiabatisk og isoterm likning

Vi definerer $r = 0$ ved overflaten på planeten. Dermed har vi fra de adiabatiske likningene at:

$$
\begin{aligned}
T(r=0) &= T_0 \\
P(r=0) &= P_0 = \frac{\rho_0 T_0}{K_0} \qquad \text{(fra ideell gasslov)} \\
\rho(r=0) &= \rho_0
\end{aligned}
$$

Vi kan gange inn alle konstanter i uttrykket for T, og skrive T på formen:

$$
T = C_0 + C_1 r
$$

Der C_0 blir:

$$C_0 = A^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) C$$

Vi ser også at $T(r=0) = C_0 = T_0$, dermed får vi likningen:

$$A^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) C = T_0$$

Som vi løser for C og får:

$$C = T_0 A^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)$$

Da gjenstår kun et uttrykk for A. Vi har jo den adiabatiske sammenhengen $T^\gamma P^{1-\gamma} = A$, som skal gjelde over alt i det adiabatiske mediet. Dermed har vi også:

$$\begin{aligned} A &= T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} \\ &= T_0^\gamma \left(\frac{\rho_0 T_0}{K_0} \right)^{1-\gamma} \\ &= T_0^{\gamma+1-\gamma} \left(\frac{\rho_0}{K_0} \right)^{1-\gamma} \\ &= T_0 \left(\frac{\rho_0}{K_0} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

Dermed har vi alle kjente konstanter for det adiabatiske mediet. Oppsummert:

$$\begin{aligned} A &= T_0 \left(\frac{\rho_0}{K_0} \right)^{1-\gamma} \\ C &= T_0 A^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \end{aligned}$$

. Vi må også løse for konstanten C_0 i det isoterme mediet. Vi vet at når $T_{adiabatisk} = \frac{T_0}{2}$ så skifter vi til den isoterme modellen vår. Dermed kan vi sette opp en likning for å finne den avstanden r_s der vi skifter modell. Likningen blir:

$$A^{\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r_s + C) \right] = \frac{T_0}{2}$$

Løser vi denne for r_s, får vi dette uttrykket:

$$r_s = \frac{T_0}{2K_0 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{C A^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g}$$

Vi vet også at $\rho_{adiabatisk}(r_s) = \rho_{isoterm}(r_s)$. Dermed får vi likningen:

$$C_0 e^{-\frac{r_s}{K_1}} = A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r_s + C) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0$$

Der vi kan sette inn for r_s, og dermed få:

$$C_0 e^{-\frac{\frac{T_0}{2K_0 g}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g}}{K_1}} = A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g \left(\frac{T_0}{2K_0 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g} \right) + C) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0$$

Løser vi for C_0 får vi at

$$C_0 = A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g \left(\frac{T_0}{2K_0 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g} \right) + C) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0 e^{\frac{T_0}{2K_0 K_1 g}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 K_1 g}}$$

Dette er store tunge uttrykk jeg absolutt ikke gidder å implementere analytisk i Python, så vi lager alt som funksjoner og gjenkjenner hvordan vi kan skrive ting og får Python til å løse det for oss. For eksempel kan det være å regne ut konstanten C_0 for, ved å definere:

$$C_0 = \rho_{adiabatisk}(r_s) e^{\frac{r_s}{K_1}}$$

Dermed har vi alle likninger og konstanter vi trenger for å modellere atmosfæren, skrevet ned på neste side.

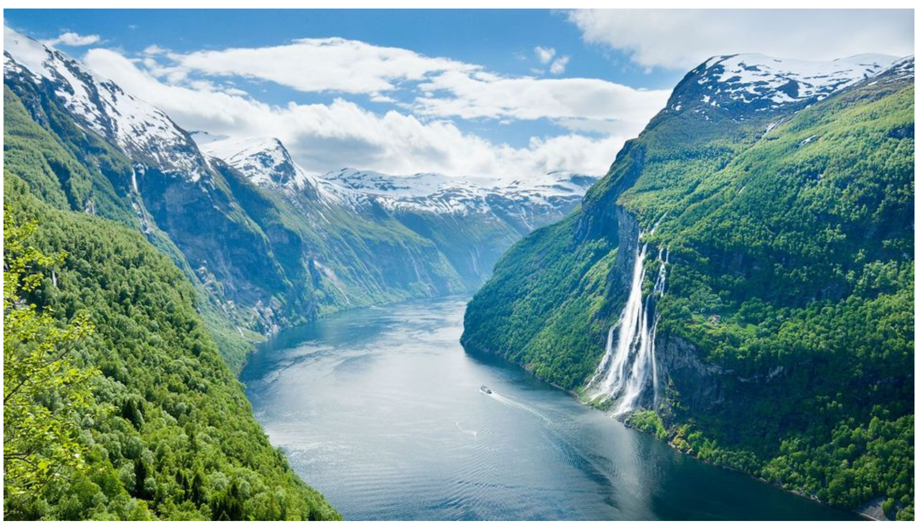

Figure 1: Etter 100 timer med å modellere atmosfære og løse diff.likninger trenger vi en tur ut i naturen

4 Endelige resultater

La oss ta en liten oppsummering:

$$T_{isoterm} = \frac{T_0}{2}$$

$$P_{isoterm} = K_1 g C_0 e^{-\frac{r}{K_1}}$$

$$\rho_{isoterm} = C_0 e^{-\frac{r}{K_1}}$$

$$T_{adiabatisk}(r) = A^{\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C) \right]$$

$$P_{adiabatisk}(r) = \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho_{adiabatisk}(r) = A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g r + C) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0$$

$$\begin{aligned}
A &= T_0 \left(\frac{\rho_0}{K_0} \right)^{1-\gamma} \\
C &= T_0 A^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \\
C_0 &= A^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot (A^{-\frac{1}{\gamma}} K_0 g \left(\frac{T_0}{2K_0 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g} \right) + C) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot K_0 e^{\frac{T_0}{2K_0 K_1 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 K_1 g}} \\
&= \rho_{adiabatisk}(r_s) e^{\frac{r_s}{K_1}} \\
r_s &= \frac{T_0}{2K_0 g} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \frac{CA^{\frac{1}{\gamma}}}{K_0 g}
\end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{kT}{\mu g m_H}$$

$$K_0 = \frac{\mu m_H}{k}$$

Der alle konstanter $K_0,\ K_1,\ A,\ C,\ C_0$ er kjent fra kjente verdier $\rho_0,\ T_0,\ \mu,\ m_H,\ k,\ \gamma$.