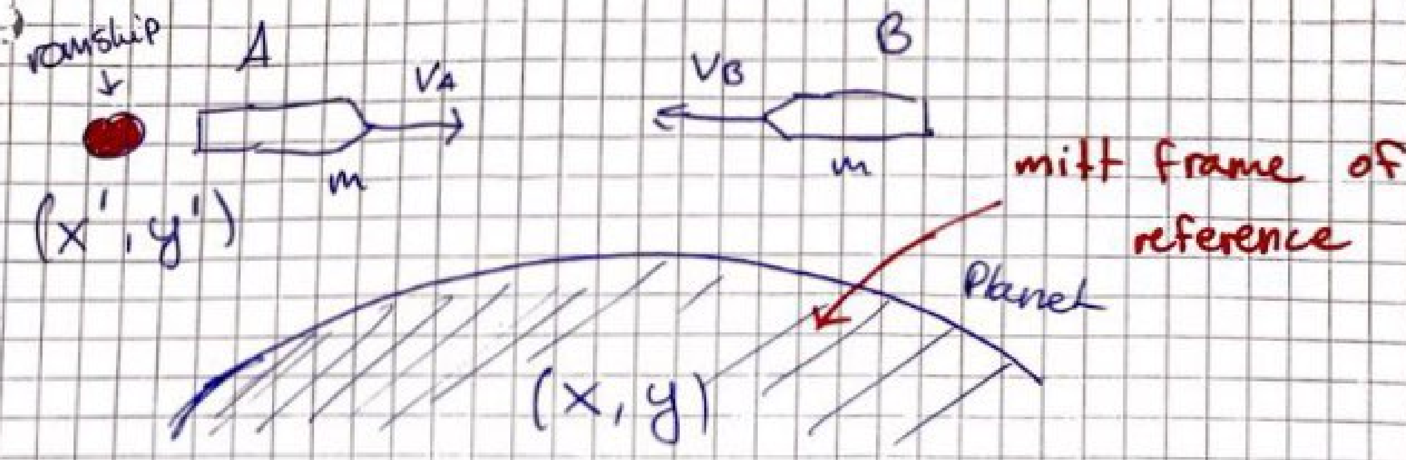
Exercise 7 re-strukturert



$V_B = -V_A$, $V_A = 0.267254c$, $m = 10^6 kg$

1) Lorentz - transformasjon

$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$

$\gamma' = (\gamma_{rel} - V_{rel}\gamma_{rel}V_x)\gamma$

$\gamma' V_x' = (-V_{rel}\gamma_{rel} + \gamma_{rel}V_x)\gamma$

rel: mellom de transformerte koordinatsystemene

x: objekt som observeres

$$V_x' = \frac{\gamma' V_x'}{\gamma'} = \frac{V_x - V_{rel}}{1 - V_{rel}V_x}$$

$V_x = V_B = -V_A$, $V_{rel} = V_A$

$$\Rightarrow V_B' = \frac{-2V_A}{1 + V_A^2}$$

2) Mass energy

$$P_\mu = mV_\mu = \gamma(m, m\vec{v}) = \gamma(m, \vec{p})$$

$$\vec{p}_{relativistic} = \gamma m\vec{v} = \gamma\vec{p} = \vec{p} \text{ omdøping}$$

$$E_{relativistic} = \gamma m = E \quad (\text{fra Taylor av } m\gamma = mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2)$$

$$P_\mu = (E, \vec{p})$$

$$E' = \gamma_{rel} E - V_{rel}\gamma_{rel} P_x$$

$$P_x' = \gamma_{rel} P_x - V_{rel}\gamma_{rel} E$$

$$P_\mu(A) = \gamma(m, mV_A, 0, 0) = (E_A, \vec{p}_A) \qquad P_\mu(B) = \gamma(m, -mV_A, 0, 0) = (E_B, \vec{p}_B)$$

Dette er i referansesystem planet, dvs. sett fra planeten!

3) Momenergy 2

$$E' = \gamma_{rel} E - V_{rel} \gamma_{rel} P_x$$

$$P_x' = \gamma_{rel} P_x - V_{rel} \gamma_{rel} E$$

$$\gamma_{rel} = \gamma \quad , \quad V_{rel} = V_A$$

$P'_\mu(A) = (E_A', \vec{P}_A')$ momenergy til A målt i (x', y') som følger A:

$\cancel{\gamma_{rel} \neq}$ $V_{rel} = 0$, $\gamma_{rel} = 1$, $P_x = mV_A$, $E = m$

$\Rightarrow P'_\mu(A) = (m, 0)$

$P'_\mu(B) = (E_B', \vec{P}_B')$ momenergy til B målt i (x', y') som følger A:

$V_{rel} = V_A' - V_B' = \frac{2V_A}{1+V_A^2}$, $\gamma_{rel} = \sqrt{1 + \left(\frac{2V_A}{(1+V_A^2)}\right)^2}$, $P_x = mV_B = -mV_A$

4) Momenergy foton

$$p_\mu^\gamma = \gamma(m, \vec{p}) \quad , \quad \vec{p} = (p_x, 0, 0)$$

$$\Rightarrow E_\gamma = m\gamma \quad , \quad \vec{p}_\gamma = \gamma \vec{p} = (p_x, 0, 0)$$

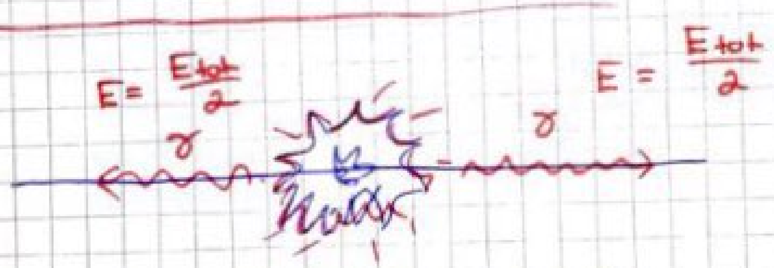
$p_\mu^\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) = (E, \vec{p})$ omdøper

$$p_\mu p^\mu = m^2 \underbrace{V_\mu V^\mu}_{1} = m^2 \quad , \quad p_\mu p^\mu = E^2 - p^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{p^2 + m^2} \overset{\text{foton } m=0}{\stackrel{!}{=}} \sqrt{p^2} = p = |\vec{p}| = \sqrt{p_x^2} = p_x \quad *$$

$$p_\mu^\gamma = (E, p_x, 0, 0) \stackrel{*}{=} (E, E, 0, 0)$$

5)



Bevaring av momenergy gir oss:

$$p_\mu(A) + p_\mu(B) = p_\mu^\gamma(A) + p_\mu^\gamma(B)$$

$$(E_{tot}, \vec{p}_A + \vec{p}_B) = (E_A^\gamma + E_B^\gamma, \vec{p}_A^{\,\gamma} + \vec{p}_B^{\,\gamma})$$

$$\Rightarrow E_A^\gamma + E_B^\gamma = E_{tot} \quad , \quad \vec{p}_A^{\,\gamma} + \vec{p}_B^{\,\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{p}_A^{\,\gamma} = -\vec{p}_B^{\,\gamma}$$

Siden $E^\gamma = \|\vec{p}^{\,\gamma}\|$ for fotoner må da

$E_A^\gamma = \|\vec{p}_A^{\,\gamma}\| = \|-\vec{p}_B^{\,\gamma}\| = \|\vec{p}_B^{\,\gamma}\| = E_B^\gamma$ foton har lik energi

6) En vinkel θ vridd, så gjelder samme utledning som i 5):

Bevaring av momenergy:

$$P_\mu(A) + P_\mu(B) = P_\mu^\gamma(A) + P_\mu^\gamma(B)$$

$$(E_A + E_B, \vec{P}_A + \vec{P}_B) = (E_A^\gamma + E_B^\gamma, \vec{P}_A^\gamma + \vec{P}_B^\gamma)$$

så lenge $\vec{P}_A$ og $\vec{P}_B$ er like store og motsatt rettet en vinkel θ gjelder

$$\vec{P}_A^\gamma + \vec{P}_B^\gamma = 0 \iff P_A^\gamma = -P_B^\gamma$$

For et foton er $E = \|\vec{P}^\gamma\|$

$$\Rightarrow E_A^\gamma = \|\vec{P}_A^\gamma\| = \|-\vec{P}_B^\gamma\| = \|\vec{P}_B^\gamma\| = E_B^\gamma$$

7) For at da momenergy (energi og bevegelsesmengde) skal være bevart (som det er i flat geometri som i spesiell relativitet) så må kravet fra 6) være oppfylt, som vil si at for et hvert foton som dannes, må et tilsvarende foton dannes i motsatt retning.

8) Evergi foton:

$$E = h\nu \quad , \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} \quad , E = \frac{E_{tot}}{N} \quad , N = \text{antall fotoner}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hcN}{E_{tot}} \quad [m] \xrightarrow{\cdot \frac{1}{c}} [s] \Rightarrow \lambda = \frac{hN}{E_{tot}}$$

Målt i SI-enheter:

fra begge skip

$$\lambda = \frac{hcN}{E_{tot}} \quad , E_{tot} = 2\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

---

9) Jeg befinner meg på planeten. Med verdier

$v = 0.267254c$, $m = 10^6$ kg får jeg

observert bølgelengde λ fra planeten

$\lambda = 677.328$ nm

som betyr rødt (625 - 750nm)

Dette stemmer med videoen i MCast.

10) Hadde at

$$E' = \gamma_{rel} E - V_{rel} \gamma_{rel} P_x$$

for positiv retning i x. Negativ retning gir

$$E' = \gamma_{rel} E + V_{rel} \gamma_{rel} P_x$$

Dermed er $E' = \gamma_{rel} E \pm V_{rel} \gamma_{rel} P_x$

Da $\gamma_{rel} = \gamma$, $V_{rel} = V$, $P_x = E$, da er

$$E' = \gamma E \pm V \gamma E = E\gamma(1 \pm V)$$

med + for negativ x-retning og − for positiv x-retning.

---

11) Vi fant i 8) at $\lambda = \frac{h}{E} \Leftrightarrow E = \frac{h}{\lambda}$

og i 10) at $E' = E\gamma(1 \pm V)$. Da har vi

$$E' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda}\gamma(1 \pm V) \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma(1 \pm V)} \quad *$$

Doppler shiftet er gitt som

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\cancel{\lambda}\left(\frac{1}{\gamma(1 \pm V)} - 1\right)}{\cancel{\lambda}} = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 \pm V} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{(1-V)(1+V)}{(1-V)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{(1+V)}{(1-V)}} - 1$$

velger positiv retning

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} - 1$$

---

12) Vi har observert λ fra planeten

$$\lambda = \frac{h}{E} = \frac{hN}{E_{tot}} , \quad E_{tot} = m + \frac{1}{2}mv^2$$

fra 11) fant vi $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}} - 1$

som gir oss doppler shiftet

$$\Delta\lambda = \left[\sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}} - 1\right] \lambda$$

som gir oss λ_0 observert på skipet:

$$\lambda_0 = \lambda - \Delta\lambda$$

nå har vi λ_0 i relativistiske enheter.
Gjør om til SI:

$$\lambda_0 \, [s] \xrightarrow{\cdot c} \lambda_0 \, [m] \qquad c \cdot \lambda_0 [s] = \lambda_0 [m]$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 = 463.909 \text{ nm}$$

som betyr blått (450 - 485 nm).

Dette stemmer veldig bra med videoen i MCast.

13) Vi fant $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}} - 1$

La $f(v) = \sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}}$. Dersom $v << 1$ kan vi Taylorutvikle rundt $v=0$:

$$f'(v) = \frac{1}{2}(1+v)^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1+v)^{\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 1$$

Tar ikke med annenordens-ledd og ut siden de er ubetydelige.

$$\Rightarrow f(v) \approx f(0) + f'(0) \cdot v = 1 + v$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}} - 1 \approx 1 + v - 1 = v \quad *$$

Vi har nå $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = v$ for $v << 1$.

Vi vet at $v \in [-1, 1]$ i relativistiske enheter, og $v \in [-c, c]$ i SI-enheter. For at enheter skal gå opp må da

$[-]$ $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$, som er vanlig Dopplershift.