Exercise 2

anton.a

December 2021

9. Leser av verdier for t' og x' i MCAst:

$$\begin{aligned} t'_A &= 0ms & x'_A &= 0km \\ t'_B &= 1.33765ms & x'_B &= 400km \\ t'_C &= 1.33765 & x'_C &= 260.661km \\ t'_D &= 2.67529ms & x'_D &= 0km \end{aligned}$$

Jeg kan gjøre et lite argument for å finne størrelsen L': denne størrelsen er rett og slett bare avstanden mellom event x'_A og x'_B, som betyr at $L' = 400km$. Vi kan også regne det ut ved å bruke tiden mellom eventene og faktumet at strålen beveger seg med lyshastighet. Da får vi at $L' = t'_B\ [ms] \cdot c\ [m/s] \approx 400km$.

10. Setter opp posisjon og tid for alle eventer i romstasjons-framen:

$$\begin{aligned} t_A &= 0ms & x_A &= 0km \\ t_B &= t_B & x_B &= x_B \\ t_C &= t_C & x_C &= 0km \\ t_D &= t_D & x_D &= -v \cdot t_D \end{aligned}$$

Der kun x_B, t_B, t_C og t_D nå er ukjente.

11. Jeg vil bare peke på at vi skriver tidene og avstandene i standard SI-ennheter, men når vi regner i tideromsintervaller blir alt gjort om til naturlige enheter. Vi bruker at tideromsavstanden er bevart, og bruker også eventene A og B i det merkede og umerkede koordinatsystemet. Vi får

$$\Delta S_{AB}^2 = \Delta t_{AB}^2 - \Delta x_{AB}^2$$

$$\Delta {S'}_{AB}^2 = \Delta {t'}_{AB}^2 - \Delta {x'}_{AB}^2$$

Vi kan regne ut intervallene og sette tideromsavstandene lik hverandre. Først skal jeg gjøre et lite argument: i naturlige enheter måler vi tid og avstand likt. Dermed vil avstanden lyset reiser i naturlige enheter også være tiden lyset bruker på å reise. Siden avstanden lyset skal reise fra event A til event B i det merkede koordinatsystemet er $x_{B'}$ betyr det at $x_{B'} = t'_B$. Vi kan sette opp alle verdiene:

$$
\begin{aligned}
t_A &= 0 \qquad & t'_A &= 0 \\
x_A &= 0 \qquad & x'_A &= 0 \\
t_B &= t_B \qquad & t'_B &= t'_B \\
x_B &= x_B \qquad & x'_B &= t'_B
\end{aligned}
$$

som gir oss at

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{AB} &= x_B \qquad & \Delta x'_{AB} &= t'_B \\
\Delta t_{AB} &= t_B \qquad & \Delta t'_{AB} &= t'_B
\end{aligned}
$$

Som videre gir oss:

$$\Delta S^2_{AB} = \Delta t^2_{AB} - \Delta x^2_{AB} = t^2_B - x^2_B$$

$$\Delta S'^2_{AB} = \Delta t'^2_{AB} - \Delta x'^2_{AB} = t'^2_B - t'^2_B = 0$$

Vi setter disse lik hverandre, og finner ut at:

$$
\begin{aligned}
& t^2_B - x^2_B = 0 \\
\Rightarrow\ & t^2_B = x^2_B \\
\Rightarrow\ & t_B = x_B
\end{aligned}
$$

12. Vi finner t_C gjennom bevaring av tideromsavstanden. Vi finner ΔS_{AC} og $\Delta S'_{AC}$

$$
\begin{aligned}
t_A &= 0 \qquad & t'_A &= 0 \\
x_A &= 0 \qquad & x'_A &= 0 \\
t_C &= t_C \qquad & t'_C &= t'_C = t'_B \\
x_C &= 0 \qquad & x'_C &= x'_C
\end{aligned}
$$

Som gir meg tideromsavstandene

$$\Delta S^2_{AC} = \Delta t^2_{AC} - \Delta x^2_{AC} = t^2_C - x^2_C = t^2_C$$

$$\Delta S'^2_{AC} = \Delta t'^2_{AC} - \Delta x'^2_{AC} = t'^2_C - x'^2_C$$

Setter vi disse lik hverandre får vi at

$$t_C^2 = t'^2_C - x'^2_C$$
$$\Rightarrow t_C = \sqrt{t'^2_C - x'^2_C}$$

13. Vi skal nå finne et uttrykk for t_B gjennom bevaring av tideromsavstander. Vi finner uttrykk for ΔS_{BC} og $\Delta S'_{BC}$. Vi setter opp alle kjente og ukjente tider og posisjoner for eventene B og C i det merkede og umerkede koordinatsystemet:

$$\begin{aligned}
t_B &= t_B & t'_B &= t'_B \\
x_B &= t_B & x'_B &= t'_B \\
t_C &= t_C & t'_C &= t'_C = t'_B \\
x_C &= 0 & x'_C &= x'_C
\end{aligned}$$

Vi finner intervallene Δt_{BC}, Δx_{BC}, $\Delta t'_{BC}$, og $\Delta x'_{BC}$:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{BC} &= -t_B & \Delta x'_{BC} &= x'_C - x'_B \\
\Delta t_{BC} &= t_C - t_B & \Delta t'_{BC} &= t'_C - t'_B
\end{aligned}$$

og setter opp tideromsavstandene:

$$\Delta S_{BC}^2 = \Delta t_{BC}^2 - \Delta x_{BC}^2 = (t_C - t_B)^2 - t_B^2$$

$$\Delta S'^2_{BC} = \Delta t'^2_{BC} - \Delta x'^2_{BC} = (t'_C - t'_B)^2 - (x'_C - x'_B)^2$$

Vi setter disse tideromsavstandene like hverandre og får:

$$(t_C - t_B)^2 - t_B^2 = (t'_C - t'_B)^2 - (x'_C - x'_B)^2$$

$$\Rightarrow t_C^2 - 2t_C t_B + t_B^2 - t_B^2 = (t'_C - t'_B)^2 - (x'_C - x'_B)^2$$

$$\Rightarrow 2t_C t_B = t_C^2 + (x'_C - x'_B)^2 - (t'_C - t'_B)^2$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{t_C^2 + (x'_C - x'_B)^2 - (t'_C - t'_B)^2}{2 \cdot t_C}$$

Hvor alle verdier t_C, x'_C, x'_B, t'_C og t'_B er kjente.

14. Vi skal nå finne et uttrykk for t_D, og må sette opp et passende tideromsintervall for å gjøre dette. Da velger jeg å bruke event D og event A, siden event A har mange verdier som er satt til 0. Vi har altså

$$\begin{aligned} t_A &= 0 & t'_A &= 0 \\ x_A &= 0 & x'_A &= 0 \\ t_D &= t_D & t'_D &= 2 \cdot t'_B \\ x_D &= -v \cdot t_D & x'_D &= 0 \end{aligned}$$

Et par kommentarer: gitt symmetrien i systemet får vi at tiden t'_D må være dobbelt så stor som t'_B, fordi lyset reiser like langt mellom event B og D som event A og B, siden lengden mellom romskipene ikke endrer seg. Dermed vil event D skje først etter tiden t'_B som er tiden for event B sett i romskip-systemet, i tillegg til at den må reise en tid t'_B tilbake til det andre romskipet der laserstrålen kom fra. Farten v er målt til $v = 0.65c$, som blir $v = 0.65$ i naturlige enheter. Vi setter opp intervallene Δt_{AD}, Δx_{AD}, $\Delta t'_{AD}$ og $\Delta x'_{AD}$:

$$\begin{aligned} \Delta x_{AD} &= -v \cdot t_D & \Delta x'_{AD} &= 0 \\ \Delta t_{AD} &= t_D & \Delta t'_{AD} &= 2 \cdot t'_B \end{aligned}$$

Videre setter vi opp tideromsavstandene ΔS^2_{AD} og $\Delta S'^2_{AD}$:

$$\Delta S^2_{AD} = \Delta t^2_{AD} - \Delta x^2_{AD} = t^2_D - v^2 t^2_D$$

$$\Delta S'^2_{AD} = \Delta t'^2_{AD} - \Delta x'^2_{AD} = (2 \cdot t'_B)^2$$

Vi setter disse like hverandre, og får:

$$t^2_D - v^2 t^2_D = (2 \cdot t'_B)^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow t^2_D(1 - v^2) = (2 \cdot t'_B)^2, \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2} \\ &\Rightarrow t_D = 2\gamma t'_B \end{aligned}$$

15. Vi finner t_B som tiden etter første refleksjon i romstasjon-systemet og setter inn tall:

$$t_B = \frac{t^2_C + (x'_C - x'_B)^2 - (t'_C - t'_B)^2}{2 \cdot t_C} \approx 0.614ms$$

16. Vi finner tiden det tok mellom første refleksjon og andre refleksjon, dvs. event D og event B i romstasjon-systemet. Denne tiden finner vi ved å regne ut forskjellen $t_D - t_B$. Vi tar uttrykkene vi har funnet, setter inn tall, og får

$$t_D - t_B \approx 2.905ms$$

17. I romstasjon-framen skjer event B før event C, og vi får at $t_B \approx 0.614ms$ og $t_C \approx 1.016ms$.