Del 9 exercise 1

Anton Brekke / antonabr@uio.no

December 2021

1 Part 1

4a) Vi har tidligere utledet at

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = \frac{M}{r}$$

Vi finner at solens masse er $M = 1476.673m$ målt i meter, og at solens radius er $r = 6957 \cdot 10^5 m$. Da finner vi at forholdet mellom Solar masse og solar radius er

$$\frac{M}{r} = 2.122 \cdot 10^{-6}$$

4b) Rødskiftet vi får er den $\frac{M}{r}$ vi regnet ut ovenfor, siden

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{SH}} = \frac{M}{r} = 2.122 \cdot 10^{-6}$$

Merk at vi kan bruke denne likningen siden antakelsen vår var at $\frac{2M}{r} \approx 0$, mao. veldig liten, som vi ser at vi har her. Vi kan løse dette slik at vi finner den λ som en observatør langt unna vil se. Vi får oppgitt at $\lambda_{max} = \lambda_{SH} = 500nm$ på overflaten til Sola:

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = \frac{M}{r}$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{M}{r}\lambda_{SH} + \lambda_{SH} = 500.00106nm$$

som betyr at en langt-vekk observatør ikke vil se noe særlig rødskift fra Solas tyngdefelt.

4c) Vi kan også finne massen til Jorda og radiusen til Jorda som

$$M_J = 4.434m$$
$$r_J = 6371 \cdot 10^3 m$$

og dermed finne forholdet mellom massen og radien som

$$\frac{M_J}{r_J} = 6.961 \cdot 10^{-7}$$

4d) Dersom vi på Jorda observerer lys som kommer langt utenifra vil Jordas tyngdefelt påvirke lyset, og vi kan tenke på det slik: Vi vet at dersom vi sender ut et lys fra jorda, at en langt vekk-observatør vil observere bølgelengden λ vi kan finne med likningen:

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = \frac{M_J}{r_J}$$

For å finne λ_{SH} som ble sendt ut fra Jordas overflate vil vi egentlig bare reversere prosesssen. Dersom vi tenker oss at Sola er denne langt-vekk observatøren som observerer bølgelengden λ, kan vi ved å reversere prosessen også finne hvilken bølgelengde λ_{SH} vi på Jorda vil observere dersom Sola sender ut et lys med bølgelengde λ. Tenk deg at vi sender ut lyset med bølgelengden λ_{SH} fra Jordoverflaten, som treffer langt-vekk observatøren på Sola med bølgelenden λ. Dersom du ser for deg at vi bare spiller tiden baklengs, ser det ut som at langt-vekk observatøren sendte ut et lys med bølgelengde λ som vi på Jorda observerer med bølgelengde λ_{SH}. Rollene har byttet! Altså er λ blitt til λ_{SH} og λ_{SH} blitt til λ, og dermed kan vi finne hvilken bølgelende vi på Jorda observerer lys utsendt fra Sola vil ha. Vi bare løser for bølgelengden λ (det som er λ_{SH} i uttrykket vi hadde ovenfor, som nå har blitt λ) og finner at

$$\frac{\lambda_{SH} - \lambda}{\lambda} = \frac{M_J}{r_J}$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_{SH}}{\left(\frac{M}{r_J} + 1\right)} = \frac{\lambda_{SH} \cdot r_J}{M_J + r_J}$$

Som med $\lambda_{SH} = 500nm$ (vi bryr oss ikke med bølgelengden vi fant i forrige oppgave siden den er så utrolig lik uansett, dermed trenger vi ikke resultatet fra forrige oppgave til å gjøre denne) utsendt fra Solas overflate gir oss $\lambda = 499.999nm$ som gir oss blåskiftet

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = -6.961 \cdot 10^{-7}$$

som betyr at Jordas tyngdefelt i *svært liten grad* påvirker hvordan vi oppfatter lyset som sola sender ut.

5) Vi betrakter nå en quasar, som er det mest energi-rike objektet vi har i universet. En quasar er tenkt å være drevet av varm gass som sirkulerer et sort hull i lyshastigheter. Vi på Jorda observerer en emisjonslinje fra en quasar målt på $\lambda = 2150nm$, og gjenkjenner den med laboratorie-målte bølgelengden $\lambda_{SH} = 600nm$ (vi tenker oss at quasaren er skallobservatøren som sender ut lys til oss som er langt-vekk observatør). Vi ser bort ifra Doppler-effekten fra Jordas tyngdefelt siden det er så lite. Vi kan denne gangen ikke bruke den forenklede formelen vår, siden vi forventer at quasaren skal ligge rett utenfor det sorte hullet, altså ved $r \approx 2M$, og da gjelder ikke antakelsen om at $\frac{2M}{r} \approx 0$ lenger. Dermed må vi bruke det mer generelle uttrykket vi utledet

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 1$$

$$\Rightarrow r\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\lambda-\lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} + 1\right)^2}\right) = 2M$$

$$\Rightarrow r = \frac{2M}{1 - \frac{1}{\left(\frac{\lambda-\lambda_{SH}}{\lambda_{SH}}+1\right)^2}} = \frac{2M\left(\frac{\lambda-\lambda_{SH}}{\lambda_{SH}}\right)^2}{\left(\frac{\lambda-\lambda_{SH}}{\lambda_{SH}}\right)^2 - 1}$$

Der M er massen til objektet quasaren befinner seg rundt. Setter vi inn tall får vi at

$$r = 2.168M$$

som er rett utenfor eventhorisonten til et sort hull (altså har quasaren en avstand $r = 2.168M$ unna sentrum av et potensielt sort hull). Dette betyr at observasjonene våre om bølgelengdene λ og λ_{SH} sier at det denne energirike quasaren *faktisk* kan ligge rett utenfor eventhorisonten til et sort hull, og siden bølgelengdene våre var såpass rødforskjøvet finnes det ikke mange objekter i universet med stort nok tyngdefelt til å kunne gi et så stort rødskift gjennom tyngdefeltet. Dermed er dette observasjoner som støtter teorien om quasarer utenfor det sorte hullet.

6) Vi tenker oss at vi er en skallobservatør som lever på et skall rett utenfor eventhorisonten på et sort hull, og titter gjennom et optisk teleskop. Det vil være fullt mulig for oss å kunne se gjennom det optiske teleskopet utover i universet, siden det sorte hullet mottar lys. Men lyset som kommer inn mot det sorte hullet vil være *veldig* blåforskjøvet, som vi kan se fra likningen

$$\frac{\lambda - \lambda_{SH}}{\lambda_{SH}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 1$$

(som forteller oss at dersom $r \approx 2M$ så vil et utsendt lys fra oss som skallobservatør gi sterk rødforskyvning, som betyr vi kan bytte rolle slik som i oppgaven over og se at vi får blåforskyvning på lyset vi mottar). Dermed må teleskopet vi bruker være i stand til å oppfatte lys på den blå siden av spektret, siden alle lys som kommer inn mot oss kommer til å bli sterkt blåforskjøvet.