Del 9 exercise 3

Anton Brekke / antonabr@uio.no

December 2021

1 Part 1

4) Vi bruker uttrykket for energi per masse vi fant tidligere

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\gamma_{SH}$$

der $\gamma_{SH} = \frac{1}{\sqrt{1-v_{SH}^2}}$. Vi bruker tallene fra MCast og gjør masse til meter, og gjør om AU til meter, og får et dimensjonsløst svar for energi per. masse ved å lage program i Pyhthon.

$$\frac{E}{m} \approx 0.878$$

Vi kan også gjøre det om til SI-enheter. Enheten vi er ute etter er $\left[\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}\right]$, så dermed må vi gange med c^2. Da får vi at

$$\frac{E}{m} \approx 7.892 \cdot 10^{16} \ \frac{J}{kg}$$

5) Vi bruker at

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

til å finne et uttrykk for $d\tau$. Ved å stokke litt om på likningen kan vi få $d\tau$ uttrykt som

$$\Delta\tau = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t}{\frac{E}{m}}$$

6) Vi kan bruke relasjonen mellom langt-vekk tid og skall-tid til å finne en sammenheng mellom egentid og skalltid.

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\Delta t_{SH}$$

Vi setter dette inn i uttrykket vi fant i 5) og vi får

$$\Delta \tau = \frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{\frac{E}{m}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\Delta t_{SH} = \frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}{\frac{E}{m}}\Delta t_{SH}$$

7) Vi bruker forholdet mellom egentiden og skalltiden dt_{SH} til å approksiemere Schwarzschild-koordinatet r, siden dette er tidsintervaller vi kan måle med observatørene våre. Vi bruker likningen vi fant i 6) og får at

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t_{SH}} = \frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}{\frac{E}{m}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t_{SH}} \cdot \frac{E}{m}\right)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$$\Rightarrow r - r\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t_{SH}} \cdot \frac{E}{m}\right)^2 = 2M$$

$$\Rightarrow r = \frac{2M}{1-\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t_{SH}} \cdot \frac{E}{m}\right)^2}$$

Dersom vi måler denne avstanden mellom de to første lyssignalene og de to siste lyssignalene, får vi at posisjonen til romskipet ett fra satelitten blir

$$r_{1,2} = 1.211 \cdot 10^{11} m = 0.809 AU$$
$$r_{30,31} = 4.277 \cdot 10^{10} m = 0.285 AU$$

Dette virker rimelig, siden romskipet reiser fra oss og nærmere det sorte hullet. Siden vi befinner oss på $r = 1AU$ gir det mening at romskipet befinner seg på en avstand $r < 1AU$. Det gir også mening at posisjonen til romskipet er nærmere det sorte hullet mellom signal 30 og 31 enn signal 1 og 2, siden romskipet sender ut disse signalene mye senere enn signal 1 og 2.

2 Part 2

4) Vi tar utgangspunkt i bevegelseslikningen for et foton:

$$\Delta r_\gamma = \pm\left(1 - \frac{2M}{r_\gamma}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{L}{Er_\gamma}\right)^2\left(1 - \frac{2M}{r_\gamma}\right)}\Delta t$$

Vi bruker likningen om energi per masse til å finne langt-vekk tiden Δt uttrykt ved egentiden til romskipet.

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{E}{m}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{E}{m} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta \tau$$

Vi antar at lyset reiser radielt innover mot det sorte hullet, og dermed har spinn $L = 0$, som forenkler uttrykket i bevegelseslikningen. Vi setter inn uttrykket for Δt, og ender opp med

$$\Delta r_\gamma = -\left(1 - \frac{2M}{r_\gamma}\right)\Delta t$$

$$= -\frac{\left(1 - \frac{2M}{r_\gamma}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta \tau$$