Del 9 exercise 6

Anton Brekke / antonabr@uio.no

December 2021

1 Part 1

2) Vi starter med å bruke likningen for energi per masse

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

Vi bruker kjente relasjoner mellom dt og dt_{SH}, og $d\tau$ og dt_{SH}.

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} dt_{SH} \\ d\tau &= \frac{1}{\gamma_{SH}} dt_H \\ \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\gamma_{SH}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \end{aligned}$$

Det er viktig å merke at relasjonen $d\tau = \frac{1}{\gamma_{SH}} dt_{SH}$ kun gjelder lokalt for skallobservatøren og fritt-fallende observatør når de er nær hverandre, og der gjelder spesiell relativitet. Videre setter vi dette inn i likningen for energi per masse, og får

$$\begin{aligned} \frac{E}{m} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\gamma_{SH}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \\ \Rightarrow \frac{E}{m} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\gamma_{SH} \end{aligned}$$

3) Vi kan bruke likning (7) i forelesningsnotat 2D til å finne potensialet $V(r)$:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad V(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)}$$

For å finne $r_{extremum}$ må vi finne en løsning på $\frac{dV(r)}{dr} = 0$. Vi bruker at $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x(t)}\right) = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}$, som gir oss at

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)' \cdot \left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)'}{2\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)}} = 0$$

Vi får også at

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)' = \frac{2M}{r^2} \qquad \left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)' = 2\left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3}$$

som gir oss at

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{\frac{M}{r^2}\left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^3}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)}} = 0$$

Da trenger kun det i telleren av brøken, som gir oss at

$$\frac{M}{r^2}\left(1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^3} = 0$$

$$\frac{M}{r^2} + M\left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^4} - \left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^3} + \left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \frac{2M}{r^4} = 0 \qquad | \cdot r^4$$

$$Mr^2 - \left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot r + 3M\left(\frac{L}{m}\right)^2 = 0$$

Dette kan vi løse ved å bruke kvadrat-formelen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, der $a = M$, $b = -\left(\frac{L}{m}\right)^2$ og $c = 3M\left(\frac{L}{m}\right)^2$.

Uttrykket for r blir da

$$r = \frac{\left(\frac{L}{m}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{L}{m}\right)^4 - 4\cdot 3M^2\left(\frac{L}{m}\right)^2}}{2M}$$

$$\Rightarrow \quad r_{extremum} = \frac{\left(\frac{L}{m}\right)^2}{2M}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\left(\frac{L}{m}\right)^2}}\right)$$

Vi vet ut fra skissen av potensialet at den minste $r_{extremum}$ er i for maksimum av potensialet, og at den største $r_{extremum}$ er for minimum av potensialet. Dermed vet vi at

$$r_{max} = \frac{\left(\frac{L}{m}\right)^2}{2M}\cdot\left(1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\left(\frac{L}{m}\right)^2}}\right) \qquad r_{min} = \frac{\left(\frac{L}{m}\right)^2}{2M}\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\left(\frac{L}{m}\right)^2}}\right)$$

4) Vi vet at spinn $\vec{L}$ er definert som

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p}\\ &= m(\vec{r}\times\vec{v})\end{aligned}$$

Vi kan skrive $\vec{v}$ og $\vec{r}$ som

$$\vec{v} = v_r\vec{e_r} + v_\phi\vec{e_\phi} \qquad \vec{r} = r\vec{e_r}$$

der $v_\phi = r\frac{d\phi}{dt}$. Siden vi vet at $\vec{e_r}\times\vec{e_r} = 0$ får vi at

$$\vec{L} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = r^2\frac{d\phi}{dt}(\vec{e_r}\times\vec{e_\phi})$$

Siden $(\vec{e_r}\times\vec{e_\phi})$ bare blir en annen enhetsvektor i det valgte koordinatsystemet og at massen er invariant får vi at størrelsen $\frac{L}{m} = \frac{|\vec{L}|}{m}$ blir

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{dt}$$

For egentiden bruker vi τ og ikke t, så vi skriver om til

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

Fra kryssproduktet ovenfor får vi også at

$$L = rp\cdot\sin\phi$$

Fra figuren i oppgaven ser vi at der raketten skyter ut vil $r = R = 20M$ og $\phi = \theta$, og dersom en skallobservatør observerer er $p = p_{SH}$. Vi har da at

$$L = R \cdot p_{SH} \cdot \sin\theta$$

Siden vi har en skallobservatør kan vi for alle lokale hendelser bruke spesiell relativitet, og der er p_{SH} gitt som

$$p_{SH} = m \cdot \gamma_{SH} \cdot v_{SH}$$

Setter vi dette inn i uttrykket kan vi få det endelige uttrykket

$$\frac{L}{m} = R \cdot \gamma_{SH} \cdot v_{SH} \cdot \sin\theta$$

6) Siden vi ikke lenger har at $\frac{E}{m} = 1$ så må vi utlede noe nytt. Vi starter med likningen for energi per masse

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

som gir oss at

$$d\tau^2 = \left(\frac{1 - \frac{2M}{r}}{\frac{E}{m}}\right)^2 dt^2 \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\frac{E}{m}}{1 - \frac{2M}{r}}$$

som vi trenger snart. Vi vet at $d\tau^2 = dS^2$, og vi bruker Schwarzshild-geometrien. Vi antar at vi ikke har noen komponent i ϕ-retning da vi antar at $L = 0$. Vi får da at

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} = \left(\frac{1 - \frac{2M}{r}}{\frac{E}{m}}\right)^2 dt^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{1 - \frac{2M}{r}} = \left(\frac{1 - \frac{2M}{r}}{\frac{E}{m}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{2M}{r}}{\left(\frac{E}{m}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{1 - \frac{2M}{r}}{\left(\frac{E}{m}\right)^2}\right)}$$

Siden vi nå befinner oss på innsiden av eventhorisonten til det sorte hullet gir det ikke lenger mening å bruke dt, siden dette er målt av langt-vekk observatøren. Langt-vekk observatøren kan ikke observere noe på innsiden av det sorte hullet fordi det ikke slipper lys ut derfra. Vi er derfor nødt til å måle egentiden τ, og må finne et uttrykk $\frac{dr}{d\tau}$ som vi kan løse. Vi kan bruke litt fysiker-matte, og skrive om $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}$. Dette gir oss

$$\frac{dr}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{1 - \frac{2M}{r}}{\left(\frac{E}{m}\right)^2}\right)} \cdot \frac{\frac{E}{m}}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

Merk at dette er uttrykket vi hadde fått fra likning (7) i forelesningsnotat 2D dersom $L = 0$. Vi kan separere likningen, og integrere å begge sider. Da får vi at

$$d\tau = \left(\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

For å få tiden fra vi faller inn i eventhorisonten og inn til singulariteten integrerer vi begge sider, og integrerer r fra 0 til $2M$. Da ender vi opp med

$$\tau = \int_0^{2M} \left(\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

Som gir oss at

$$\tau \approx 0.242 \cdot M$$

Vi plugger inn massen $M = 4 \cdot 10^6 M_\odot$ og får at det tar $\tau \approx 4.767s$ å komme til singulariteten fra eventhorisonten.