Del 9 exercise 8

Anton Brekke / antonabr@uio.no

December 2021

1 Part 1

1) Vi tar utgangspunkt i bevegelseslikningen for lys:

$$dr = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{L}{Er}\right)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt$$

Vi innfører *impakt-parameteren* b som er definert ved $b = \frac{L}{p}$. Vi husker at $p = E$ for lys, og får at $b = \frac{L}{E}$. Vi kan sette dette inn i bevegelseslikningen for lys og får

$$dr = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right)$$

Så bruker vi kjente relasjoner mellom dr og dr_{SH}, og dt og dt_{SH}:

$$dr = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}dr_{SH}$$
$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}dt_{SH}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\left(\frac{dr_{SH}}{dt_{SH}}\right)^2$$

Vi kan sette dette inn i uttrykket vi uledet fra bevegelseslikningen ovenfor, og vi får at

$$\left(\frac{dr_{SH}}{dt_{SH}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2}\left(\frac{dr_{SH}}{dt_{SH}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2}$$

2) Vi tar utgangspunkt i likning (7) fra forelesningsnotat 2D:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right]$$

Ved å bruke likningen for energi pr. masse kan vi finne $d\tau$ uttrykt som

$$d\tau = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{m}{E}dt$$

Vi kan sette det inn i likningen over, og vi får at

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right)$$

Ved å bruke impaktparameteren $b = \frac{L}{E}$ for lys. Vi viste i forrige oppgave at likningen ovenfor kan skrives om som

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{dr_{SH}}{dt_{SH}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2}$$

for en skall-observatør. Vi flytter på leddene slik at vi har det som er konstant på en side, og alt annet på den andre siden. Da har vi

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{dr_{SH}}{dt_{SH}}\right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2} = \frac{1}{b^2}$$

Vi gjenkjenner dette på formen

$$Bv_{SH,r}^2 + V(r)^2 = A$$

fra likning (8) i forelesningsnotat 2D, og dermed ser vi at potensialet $V(r)$ kan finnes som

$$V(r)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(r) = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2}}$$