Vi starter med å definere formlene for hydro-statisk likevekt, idell gass og adiabatisk lov:

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\rho(r)\, g(r) \qquad (1)$$

$$P(r)^{1-\gamma}\, T(r)^{\gamma} = \text{konstant} = C \qquad (2)$$

$$P(r) = \frac{\rho(r)\, k_B\, T(r)}{\mu m_H} \qquad (3)$$

Vi samler konstantene ved: $\alpha = \dfrac{k_B}{\mu m_H}$.

Ved isotermisk atmosfære er temperaturen konstant og vi kan skrive:

$$T(r) = \text{konstant} = T_0$$

Trykket er ikke konstant, men atmosfæren er i hydrostatisk likevekt. Vi setter (3) inn i (1) og løser for $\rho(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho(r)\, T(r)\, \alpha\right) = -\rho(r)\, g(r)$$

$$\rightarrow T_0\, \alpha \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho(r)\right) = -\rho(r)\, g(r) \rightarrow \partial(\rho(r))\, \rho(r)^{-1} = -\frac{g(r)}{T_0 \alpha}\, dr$$

Vi antar at atmosfæren er mye mindre en planetens radius og antar dermed $g(r) \approx g$.

Videre integrerer vi fra grensen mellom adiabatisk atmosfære og isoterm atmosfære (h_b) til en høyde (h):

$$\rightarrow \int_{h_b}^{h} \frac{1}{\rho(r)} d(\rho(r)) = -\frac{g}{\alpha T_0} \int_{h_b}^{h} dr$$

$$\rightarrow \ln(\rho(h)) - \ln(\rho(h_b)) = -\frac{g}{\alpha T_0}(h - h_b)$$

$$\rightarrow \cancel{e}^{\cancel{\ln}(\rho(h))} - \cancel{e}^{\cancel{\ln}(\rho(h_b))} = e^{-\frac{g}{\alpha T_0}(h - h_b)}$$

$$\rightarrow \rho(h) = \rho(h_b) + e^{-\frac{\mu m_H g}{k_B T_0}(h - h_b)} \quad (4)$$

Formel (4) er metoden for tetthet i en isoterm atmosfære. Det neste vi trenger er temperatur og tetthet for en adiabatisk atmosfære. Vi starter med å skrive om (2) med hensyn på $T(r)$:

$$P(r)^{1-\gamma} T(r)^{\gamma} = C \rightarrow T(r) = \frac{C^{1/\gamma}}{P(r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

$$\longrightarrow T(r) = P(r)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} C^{1/\gamma} \quad (5)$$

Setter vi nå (5) inn i (3) og løser for tetthet får vi:

$$P(r) = \rho(r) \alpha \left(P(r)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} C^{1/\gamma} \right)$$

$$\rightarrow \rho(r) = \frac{P(r)}{\alpha C^{1/\gamma} P(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \alpha^{-1} C^{-\frac{1}{\gamma}} P(r)^{1-\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$= \frac{P(r)^{1/\gamma}}{\alpha C^{1/\gamma}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{P(r)}{C}\right)^{1/\gamma} \quad (6)$$

Vi løser også for trykk og får:

$$\rightarrow P(r) = C\left(\alpha \rho(r)\right)^{\gamma} \quad (7)$$

Nå som vi har et uttrykk for tetthet basert på adiabatisk lov (5) kan vi sette det inn i uttrykket for hydrostatisk likevekt (1) og løse for trykk:

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{P(r)}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g$$

$$\rightarrow \frac{\partial P(r)}{\partial r} P(r)^{-\frac{1}{\gamma}} = -\frac{g}{\alpha C^{1/\gamma}} \rightarrow \partial P(r)\, P(r)^{-1/\gamma} = -\frac{g}{\alpha C^{1/\gamma}}\, dr$$

Vi integrerer nå fra overflaten av Åtvekdal $h_å$ en høyde h:

$$\rightarrow \int_{h_å}^{h} \frac{1}{P(r)^{1/\gamma}}\, d(P(r)) = -\frac{g}{\alpha C^{1/\gamma}} \int_{h_å}^{h} dr$$

NB! For å løse integralen bruker vi wolfram alpha.

$$\rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[P(r)^{-\frac{1}{\gamma}-1} - P(r)^{-\frac{1}{\gamma}-1}\right]_{h_å^o}^{h} = -\frac{g}{\alpha C^{1/\gamma}}(h-h_å^o)$$

$$\left(-\frac{1}{\gamma}-1 = -\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

$$\rightarrow P(h)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = P(h_b)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_H g}{k C^{1/\gamma}}(h-h_å^o) \quad (8)$$

$P(h_b)$ er en konstant og kan noteres som C. Vi kan stoppe med utledningen av trykket her, fordi vi er kun ute etter tetthet og temperatur. Vi kan nemlig sette (8) inn i (5) og få temperatur:

$$T(r) = \left(C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_H g}{k C^{1/\gamma}}(h-h_å^o)\right) C^{1/\gamma}$$

$$\left(C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} C^{\frac{1}{\gamma}} = C^{\left(1-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\right)} = C\right)$$

$$= C - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_H g}{k}(h-h_å^o).$$

Vi kan tenke oss at temperaturen synker høyt oppe i atmosfæren og den er høyest ved overflaten, dermed er det logisk å sette $C = T_0$.

Samme prosedyre for temperatur kan vi gjøre for tetthet, bare at vi setter (7) inn i (1) og løser for tetthet:

$$\frac{\partial}{\partial r} C(\alpha\rho(r))^{\gamma} = -\rho(r) g$$

$$\rightarrow \partial(\rho(r))\,\rho(r)^{-1/\gamma} = -\frac{g^{1/\gamma}}{\alpha C^{1/\gamma}}\, dr$$

Vi bruker samme integralgrenser som for temperatur og dure i gang wolfram alpha og får:

$$\rightarrow \int_{h_{a}^{\circ}}^{h} \frac{1}{\rho(r)^{1/\gamma}}\, d(\rho(r)) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{g}{C}\right)^{1/\gamma} \int_{h_{a}^{\circ}}^{h} dr$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\gamma}\left[\rho(r)^{-\frac{1}{\gamma}-1} - \rho(r)^{-\frac{1}{\gamma}-1}\right]_{h_{a}^{\circ}}^{h} = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{g}{C}\right)^{1/\gamma}(h - h_{a}^{\circ})$$

$$\rightarrow \rho(h) = \left(\rho(h_{a}^{\circ})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{g}{C}\right)^{1/\gamma}(h - h_{a}^{\circ})\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$= \left(\rho_0^{\gamma-1} - \frac{\mu m_H g}{k_B T_0}(h - h_{a}^{\circ})\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (9)$$

Vi har dermed et uttrykk for adiabatisk tetthet i (9).