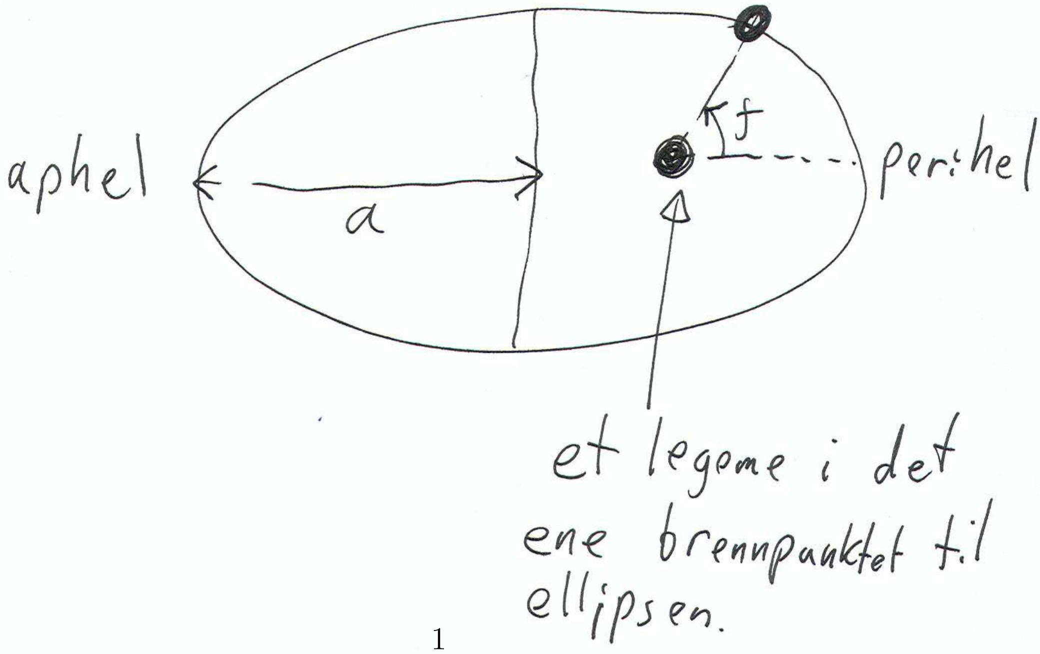
Fasit på midtveiseksamen Høst 2007

1)

* For bundne legemer er banen <u>ellipse</u>
* a er store halvakse (se figur)
* e er eksentrisitet: $e=0$ sirkel, $e \approx 1$, <u>avlang</u> ellipse
* f er vinkelposisjonen målt fra $f=0°$ ved den posisjonen i banen der de to legemene er nærmest hverandre



* Sett fra massesenteret til to-legemesyst., går begge legemer i ellipsebaner om massesenteret
* bundne legemer: kin. + pot. energi < 0

2) * P = omløpsperiode

* a = store halvakse i ellipsen

* m_1, m_2 = massen til de to legemene

3) Bruker Keplers 3. lov:

$P = 75{,}3$ år

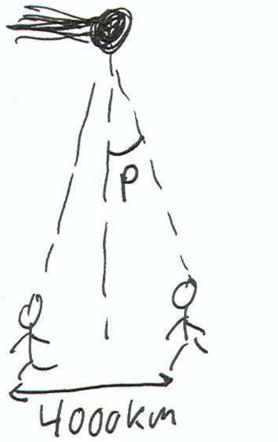
m_1 = massen til sola

m_2 = massen til kometen

* Antar at $m_2 \ll m_1$ og at
* andre legemer i solsystemet ikke påvirker banen

$$a = \left(\frac{G m_1 P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \underline{\underline{17{,}8 \text{ AU}}}$$

4) Parallaksevinkelen er definert som halvparten av den målte forskjellen i posisjonen: $p = \frac{6''}{2} = 3''$



5)

$$B = \frac{4000km}{2} = 2000\,km$$

$$d \approx \frac{B}{p} = \frac{2000km}{3'' \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}} = \underline{\underline{0{,}92\ AU}}$$

6) Nærmest når $f = 0°$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = \underline{\underline{0{,}59\,AU}}$$

Oppgave 2

1) Leser av fra figuren at toppen er på $\lambda \approx 825\,nm$ (alt fra 800-850 godtaes)

Wiens forskyvninslov gir oss da

$$T = \lambda_{max}^{-1} \cdot 0{,}0029\,mK \approx \underline{\underline{3500\,K}}$$

2) Finner senteret til spektrallinjen fra figuren $\lambda_c \approx 656{,}35\,nm$

Forskyvningen av linjen er da

$$\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda_0 = 656{,}35\,nm - 656{,}3\,nm$$

$$= \underline{\underline{0{,}05\,nm}}$$

Antar at forskyvningen kommer fra Doppler effekten:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c \approx \underline{\underline{23\,km/s}}$$

* Dette er et positivt tall så Betelgeuse beveger seg <u>bort</u> fra oss.

3) Stefan-Boltzmann

$$F = \sigma T^4 = \sigma \cdot (3500 K)^4 \approx 8{,}5 \frac{MW}{m^2}$$

4) Fluks = energi per areal

Stjernen stråler ut en energi på σT^4 gjennom hvert arealelement av overflaten.
Overflaten til stjerna har areal $4\pi R^2$

Totalt utstrålt energi er dermed $4\pi R^2 \sigma T^4$

I en avstand r fra stjerna er den totalt utstrålte energien fortsatt den samme (antar at ingenting har gått tapt på veien). Men energien er nå fordelt over et kuleskall med areal $4\pi r^2$

Fluksen i avstand r blir da:

$$F = \frac{\text{energi}}{\text{areal}} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4$$

5

Hvis Betelgeuse er et sort legeme kan vi bruke uttrykket fra forrige oppgave for fluksen F. Dermed har vi nok informasjon til å kunne regne ut de tilsynelatende magnituden til Betelgeuse (under antakelsen at uttrykket vi bruker for F stemmer, noe det gjør for sorte legemer. Vi har

$$m_B = m_\odot - 2{,}5 \lg \frac{F_B}{F_\odot} = m_\odot - 2{,}5 \lg \frac{\left(\frac{R_B}{r_B}\right)^2 \sigma T_B^4}{\left(\frac{R_\odot}{r_\odot}\right)^2 \sigma T_\odot^4} \approx \underline{\underline{-1{,}35}}$$

(Svaret vil avhenge av temp. du fant for Betelgeuse)

Vi har oppgitt at $m_B = 0{,}58$. Dermed kan det være at antakelsen om sort legeme ikke har stemt.

(Det er også en annen mulig het: (Dette er ikke pensum, men hvis noen har nevnt det gir det bonus) Absorpsjon av lyset pga. interstellart støv)

Hvis Betelgeuse hadde vært et sort legeme (og vi ser bort fra absorpsjon) hadde

$\underline{m_B \approx -1{,}35}$ [kan vise dette også f.eks. ved å sammenlikne temperaturen

6) Fluksen til supernovaen hadde vært

$$F_{SN} = \left(\frac{R_{SN}}{r_{SN}}\right)^2 \sigma T_{SN}^4$$

Vi har oppgitt at $T_{SN}^4 \approx T_B^4$.
Vi vet også at avstanden er den samme $r_{SN} = r_B$. Dermed er

$$F_{SN} = \left(\frac{R_{SN}}{r_B}\right)^2 \sigma T_B^4$$

Vi får dermed

$$m_{SN} - m_B = -2{,}5 \lg \frac{F_{SN}}{F_B} = -2{,}5 \lg \frac{\left(\frac{R_{SN}}{r_B}\right)^2 \sigma T_B^4}{\left(\frac{R_B}{r_B}\right)^2 \sigma T_B^4}$$

$$\Rightarrow m_{SN} = m_B - 2{,}5 \lg \left(\frac{R_{SN}}{R_B}\right)^2 = \underline{m_B - 5 \lg \frac{R_{SN}}{R_B}}$$

7) Setter inn $R_{SN} = 1000\, R_B$
i forrige formel:

* $m_{SN} = 0{,}58 - 5 \lg 1000 = \cancel{-15{,}58}$ $-14{,}42$

* Vi vet at den vil være mye sterkere enn planetene (Venus har magnitude rund −4 til −5). Den vil også være sterkere enn månen (rundt −12 ved fullmåne), men den vil ikke være fullt så sterk som sola. Det er sannsynlig at den vil kunne sees om dagen.

~~Kan også argumentere slik:~~

Kan også argumentere slik:
Betelgeuse (ikke SN) har mag = 0,58.
Den klassiske magnitudeskalaen hadde 1 for de sterkeste stjernene ⇒ Betelgeuse er en av de stjernene på himmelen. SN har mag ≈ −15 som bety ca. 10^6 ganger sterkere!

8) I denne oppgaven var det trykkfeil. Vi vil derfor se bort fra tallene som brukes, vi vil bare se på fremgangsmåten.

Relativistisk energi er gitt ved

$$E = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

(her er $c=1$ fordi vi måler avstand og tid i samme enheter)

Vi løser for v:

$$\underline{\underline{v = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{E}\right)^2}}}$$

9) I denne oppgaven trengs <u>ikke</u> hastigheten v regnet ut i forrige oppgave så lenge man bruker invarians av linjeelementet slik oppgaveteksten sier. Derfor forventes også et riktig tall i svaret her.

Jorden er lab-system med koordinater (x, t)
Protonets hvilesystem bruker koordinater (x', t')

Event A er supernovaeksplosjonen, event B er at protonet kommer frem til oss.
Koordinatene til de to eventene er da

$x_A = 430$ l.y.	$x'_A = 0$
$t_A = t_A$	$t'_A = t'_A$
$x_B = 0$	$x'_B = 0$
$t_B = t_B$	$t'_B = t'_B$

$\Delta t = t_B - t_A = 432.1$ år, $\Delta t' =$ det vi skal finne

Invarians av linjeelement:

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \sqrt{(\Delta x')^2 - \Delta x^2 + \Delta t^2} = \sqrt{(432{,}1 \text{ år})^2 - (430 \text{ år})^2}$$

$$\approx \underline{43 \text{ år}}$$

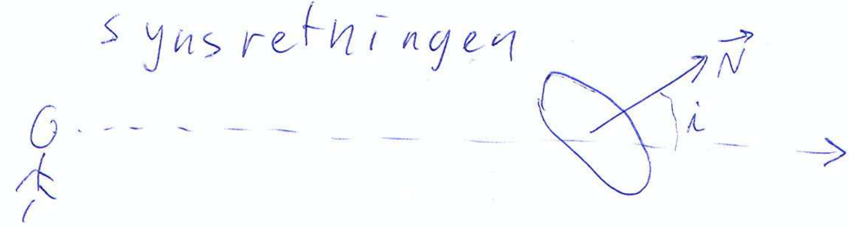
Oppgave 3

1) * P er omløpsperioden til planeten og stjerna om felles massesenter

* m_* er stjernas masse

* V_{*r} er den MAKSIMALE radielle hastigheten til stjerna som måles i løpet av en periode

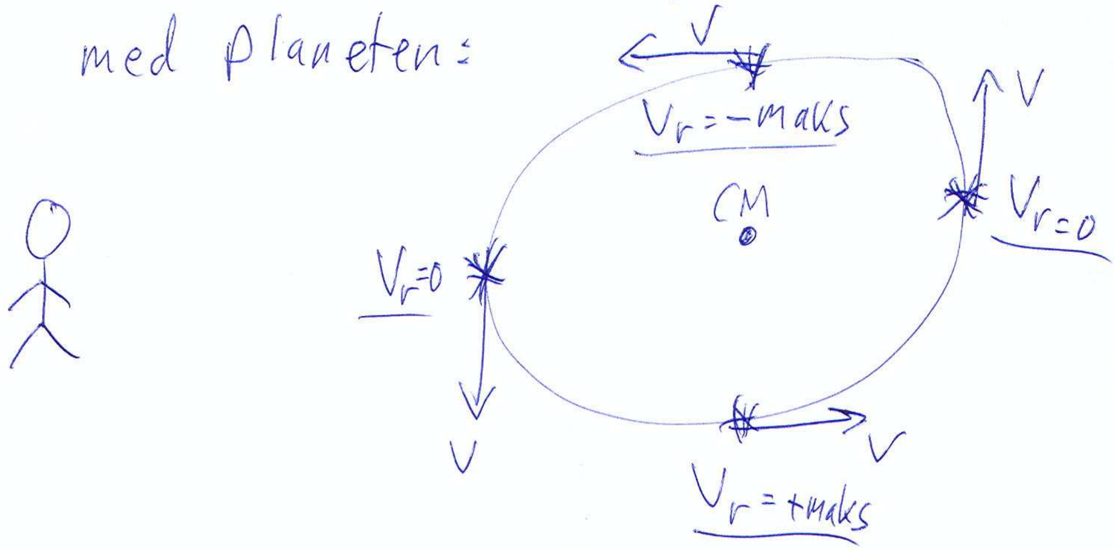
* i er inklinasjonen: Vinkelen mellom normalen til baneplanet og synsretningen



* Målinger av stjernas hastighet vha Doppler effekten må foretaes over tid. Ser man en periodisk variasjon kan dette være tegn på en planet i bane. P og V_{*r} finner man fra disse målingene. Hastighet måles ved å måle forskyvning av spektrallinjer.

(* Massen til stjerna må måles f.eks. med spektroskopi.)

2) Den radielle hastigheten til stjerna forandrer seg ettersom stjerna går rund i banen omkring massesenteret med planeten:



3) Leser av maks. hastighet i figuren:

$V_{*r} \approx 225\ m/s$ og periode $P \approx 95t$

Vi har $m_* = 0,8 M_\odot$. Setter inn i formelen og får

$$m_p \sin i \approx \underline{\underline{1,5\ M_J}}$$

Hvis vi antar $i = 90°$ er $m_p = \underline{1,5 M_J}$

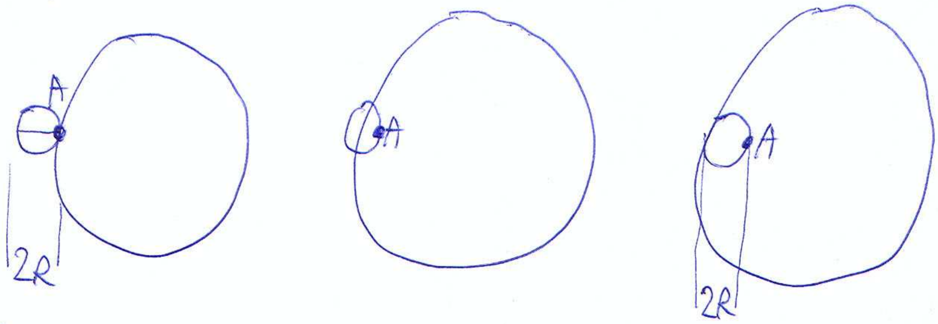
Hvis $i < 90°$ er $\sin i < 1$ og dermed er $\underline{m_p > 1,5 M_J}$

Inklinasjonen i er ukjent, derfor kan vi bare finne minste mulige masse ved å sette $i = 90°$

4) Vi ser at fluksen til stjerna faller i et kort tidsrom noe som kan tyde på at planeten formørker stjerna. For at planeten skal kunne formørke stjerna må baneplanet ligge langs synsretningen slik at $i \approx 90°$. Da er $m_p = 1{,}5 M_J$ ikke lenger den minste mulige massen, men et godt estimat av massen siden vi nå kjenner i.

5) Vi kan finne radien til planeten ved å se hvor lang tid det tar til lyskurven når et minimam.

Når formørkelsen beggnner "treffer" rand A på planeten akkurat randen til stjerna:



Når punkt A på planeten har beveget seg en strekning $s=2R$ hvor R er radien til planeten, så er lyskurven på minimum. Hvis v er hastigheten til planeten i forhold til stjerna $V = V_p + V_*$ og Δt er tiden fra formørkelsen begynner til lyskurven har nådd minimum så har vi $s = v \cdot t \Rightarrow 2R = (V_* + V_p)\Delta t$

$$\Rightarrow R = \frac{(V_* + V_p)\Delta t}{2}$$

$\rightarrow$ Fortsetter

5) → Fortsatt:

Vi kjenner nå hastigheten til stjerna. Siden $i = 90°$ er $v_* = v_{*r}$.

Ved å anta sirkulær bane kan vi også finne hastigheten til planeten.

$$v_p = \frac{2\pi a}{P}.$$

For å finne radien a i sirkelbanen bruker vi keplers 3. lov:

$$a = \left(\frac{G m_* P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

som gir $\underline{v_p \approx 125\ km/s}$

Tiden Δt finner vi nå fra figuren. Det tar ca. 4 observasjoner (à 5 min) fra formørkelsen begynner til lyskurven har nådd minimum. Altså $\Delta t \approx 4 \cdot 5 min = \underline{20 min}$

Det gir $R \approx 75\,000\ km$

Hvis man regner 2 observasjoner (godtar jeg også) mellom start og minimum får man

$R \approx 37\,500\ km$

b) Finner tettheten:

$$\rho_p = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3}$$

For $R = 75\,000\,km$ får man $\rho \approx 1600\ kg/m^3$

$\Rightarrow$ gassplanet

For $R = 37\,500\,km$ får man $\rho \approx 13000\ kg/m^3$

$\Rightarrow$ tung steinplanet