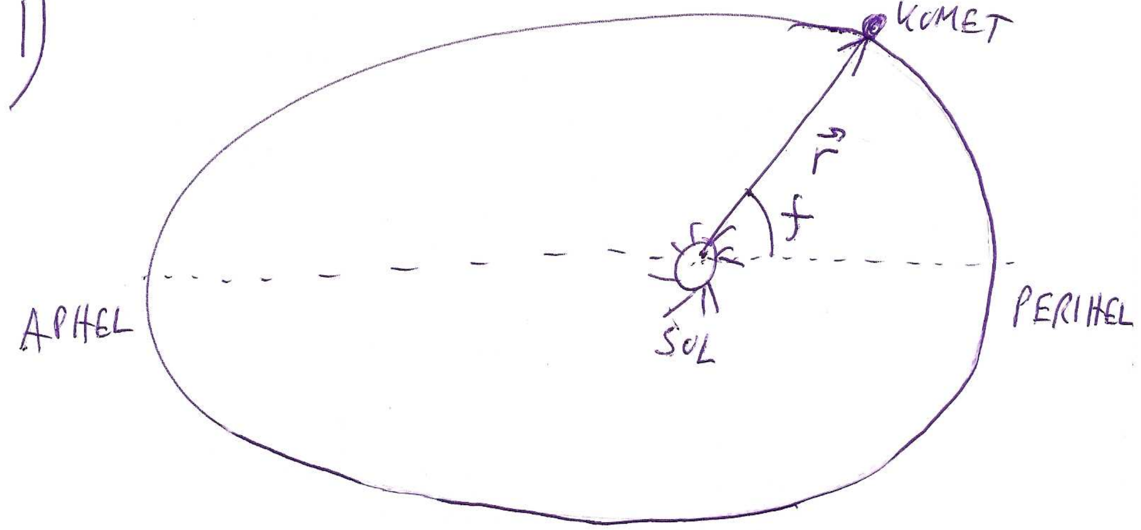
FASIT MIDTVEISEKSAMEN 2010

1)



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

r: LENGDEN AV VEKTOREN

$\vec{e}_r$: ENHETSVEKTOR I RETNING AV KOMETEN

2) VI DERIVERER FOR Å FÅ HASTIGHETEN

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

(KJERNEREGEL)

VI TRENGER $\dot{\vec{e}}_r$ OG MÅ DERFOR FINNE ET UTTRYKK FOR $\vec{e}_r$

2 FORTS

FRA FIG.1 SER VI AT PROJEKSJONEN AV $\vec{e}_r$ I $\vec{e}_x$ OG $\vec{e}_y$ KAN SKRIVES SOM

$$\vec{e}_r = \cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y$$

SIDEN $\underline{|\vec{e}_r| = 1}$

VI SER OGSÅ AT

$$\vec{e}_\theta = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$$

VI DERIVERER $\vec{e}_r$:

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}(\cos\phi)\,\vec{e}_x + \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}(\sin\phi)\,\vec{e}_y$$

DER $\vec{e}_x$ OG $\vec{e}_y$ ER FASTE.

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\phi}(-\sin\phi)\,\vec{e}_x + \dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_y$$

$$= \dot{\phi}(-\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y) = \underline{\underline{\dot{\phi}\,\vec{e}_\theta}}$$

DERMED HAR VI

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\theta$$

VI SER AT TANGENSIALHAST $V_\theta = r\dot{\phi}$

2. FORTS

SPINN PER MASSE ER

$$h = \frac{\vec{r} \times m\vec{v}}{m} = \vec{r} \times \vec{v} = r\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{f}\vec{e}_\theta) = r^2\dot{f}$$

$$= r v_\theta \Rightarrow \underline{\underline{v_\theta = \frac{h}{r}}}$$

3) VI FINNER FØRST HASTIGHET I APHEL:

AVSTAND KOMET-JORD = 3,11 AU I APHEL.

DEN BEVEGER SEG ~~4302 PÅ~~ 38,7'' PÅ

1 TIME, BRUKER LITEN-VINKEL-FORMEL:

$$\underbrace{\frac{38{,}7}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}}_{\text{VINKEL I RADIANER}} \cdot 3{,}11\ AU \approx \underline{87\,500 km}$$

RELATIV HAST. TIL KOMET BLIR:

$$V_{REL} = \frac{87\,500 km}{3600 s} \approx 24{,}3\ km/s$$

KORRIGERT FOR JORDAS HAST. FINNER VI

$$V_{APHEL} = \cancel{24{,}3\ km} \; 30\ km/s \pm 24{,}3\ km/s$$

$$\approx \underline{\underline{5{,}7\ km/s}} \text{ ELLER } \underline{\underline{54{,}3\ km/s}}$$

DET VAR IKKE SPESIFISERT I OPPGAVEN OM KOMETENS OBSERVERTE BEVEGELSE VAR MED ELLER MOT JORDAS BEVEGELSE, BEGGE SVAR BLIR GODTATT.

SPINNET BLIR $h = r v_\theta = 4{,}11 AU \cdot 5{,}7 \, km/s$

VI FINNER HAST. I PERIHEL MED SPINNBEVARING

$$r_{PER} \cdot V_{PER} = r_{APH} \cdot V_{APH}$$

ELLER 54,3 km/s

$$0{,}33 AU \cdot V_{PER} = 4{,}11 AU \cdot 5{,}7 \, km/s$$

$$V_{PER} = 5{,}7 \cdot \frac{4{,}11}{0{,}33} \approx \underline{\underline{71 \, km/s}}$$

ELLER $\underline{\underline{676 \, km/s}}$

BEGGE SVAR GODTAES

4) VI SKAL FINNE POSISJONSVEKTOREN $\vec{r}(t)$ SOM FUNKSJON AV TIDEN.

VI BRUKER NEWTON 2: $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

DER $\vec{F}$ ER GRAV. KRAFTEN

$$-G \frac{mM}{r^3} \vec{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

DER MINUSTEGNET KOMMER AV AT KRAFTEN ER RETTET MOT SOLA, OMVENDT AV $\vec{r}$

4. FORTS

VI HAR DERMED EN 2. ORDENS DIFFLIKNING SOM VI LØSER MED EULERSMETODE. VI BEGYNNER I APHEL DER VI KJENNER POSISJON OG HASTIGHET OG UTVIKLER $\vec{r}$ I HVERT TIDSSTEG SOM

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + [\vec{v}_n + \vec{a}(\vec{r}_n, \vec{v}_n)\Delta t]\Delta t$$

DER Δt ER ET LITE TIDSSTEG, $\vec{v}_n$ ER HAST. I STEG n OG $\vec{a}$ DEN TILSVARENDE AKSELERASJONEN.

KODE:

m = KOMETMASSE

M = SOLMASSE

$r = (-4{,}11\,AU, 0)$ (POSISJONSVEKTOR)

$v = (0, -3\,km/s)$ (HAST. VEKTOR)

Δt = TIDSSTEG

LØKKE OVER N TIDSSTEG

$F = -G\dfrac{mM}{|r|^3}r$ (KRAFTVEKTOR)

$a = \dfrac{F}{m}$ (AKSELRASJON)

4. FORTS

$V = V + a\Delta t$ (OPPDATERT HAST.)

$r = r + v\Delta t$ (OPPDATERT POSISJON)

SLUTT PÅ LØKKE

5) I PERIHEL HAR KOMETEN NULL HASTIGHET I r-RETN. BEVARING AV BEVEGELSEMENGDE GIR DEN EN HASTIGHET:

$$P_{FØR} = P_{ETTER} \quad \text{(I RADIELL RETNING)}$$

$$0 = mV_r + \frac{m}{100} \cdot 1\ m/s$$

$$V_r = -\frac{1}{100}\ m/s$$

VI MÅ DERMED LEGGE INN FØLGENDE TEST I LØKKA VÅR: IF PERIHEL THEN

$$V = V - \frac{1}{100}\ m/s\ \frac{r}{|r|} \quad \text{(FARTSENDRING I RADIELL RETNING)}$$

$$m = m - \frac{m}{100}$$

ENDIF

VI SER AT BANEENDRINGEN BLIR SVÆRT LITEN: BANEBEVEGELSE AVHENGER AV $G(M_\odot + M_{KOMET})$, DER ENDRING AV $M_{KOMET} \ll M_\odot$ KNAPT MERKES.
VI SER OGSÅ AT HASTIGHETSENDRING I RADIELL RETNING ER SVÆRT LITEN I FORHOLD TIL TOTAL HASTIGHET.

<u>BONUSPOENG FOR DE SOM FANT UT HVORDAN TESTE OM KOMETEN VAR I PERIHEL VED HVERT OMLØP:</u>

HVIS DEN RADIELLE HAST. GÅR FRA Å VÆRE POSITIV TIL NEGATIV, VET VI AT VI ER I PERIHEL ELLER APHEL. VI VET AT ANNEN HVER GANG DETTE SKJER, SÅ ER VI I PERIHEL

IF $V_{i-1} \cdot \frac{r}{|r|} > 0$ AND $V_i \frac{r}{|r|} < 0$ THEN

IF PERIHEL = 0 THEN PERIHEL = 1 ELSE PERIHEL = 0

PASS PÅ Å SETTE PERIHEL = 1 FØRSTE GANG $|r| = 0{,}33$ AU

6) FINNER FLUKSEN FRA LUMINOSITETEN

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{3{,}8 \cdot 10^{26}\,W}{4\pi\,(4{,}11\,AU)^2} \approx 80\,W/m^2$$

7) DEN TOTALE STRÅLINGEN SOM KOMETEN MOTTAR:

$$\text{FLUKS} \cdot \text{AREAL} = 80\,W/m^2 \cdot \underbrace{\pi \cdot (10\,km)^2}_{\text{AREAL AV SKIVE}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{10}\,W$$

70% AV DETTE ($L = 2{,}5 \cdot 10^{10}\,W \cdot 0{,}7 \approx 1{,}75 \cdot 10^{10}\,W$) BLIR REFLEKTERT UNIFORMT UT I ET AREAL $\frac{4\pi r^2}{2}$ (HALVKULE). JORDA BEFINNER SEG I AVSTAND $4{,}11 - 1 = 3{,}11$ AU OG MOTTAR FLUKS

$$F_{MOTTATT} = \frac{1{,}75 \cdot 10^{10}\,W}{2\pi\,(3{,}11\,AU)^2} \approx \underline{1{,}3 \cdot 10^{-14}\,W/m^2}$$

BRUKER SOLA SOM REFERANSE:

$$m_{SOL} - m_{KOMET} = -2{,}5 \lg \frac{F_{SOL}}{F_{KOMET}}$$

$$m_{KOMET} = -26{,}7 + 2{,}5 \lg \frac{\frac{L_\odot}{4\pi (1\,AU)^2}}{1{,}3 \cdot 10^{-14}\,W/m^2} \approx \underline{16}$$

IKKE SYNLIG

7

8) event A : $x=0,\ t=0$

$x'=0,\ t'=0$

event B : $x=v\Delta t$ (PROSJEKTILET HAR BEVEGET SEG MED HAST. V I TID Δt)

$x'=0$

$t=\Delta t$

$t'=\Delta t'$

$\Delta S_{AB}^2=\Delta t_{AB}^2-\Delta x_{AB}^2,\ (\Delta S'_{AB})^2=(\Delta t'_{AB})^2-(\Delta x'_{AB})^2$

$\Delta S_{AB}^2=(\Delta S'_{AB})^2 \Rightarrow \Delta t^2-v^2\Delta t^2=(\Delta t')^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-v^2}}}$$

9) event A: $x_A=0$ $x'_A=0$ $x''_A=0$

$t_A=0$ $t'_A=0$ $t''_A=0$

event B : $x_B=v_1t_B$ $x'_B=0$ $x''_B=?$

$t_B=?$ $t'_B=?$ $t''_B=t''_C=100s$

event C : $x_C=v_2t_C$ $x'_C=?$ $x''_C=0$

$t_C=?$ $t'_C=?$ $t''_C=100s$

$x=0$ $\rightarrow x_1=v_1t$ $\rightarrow x_2=v_2t$

10) VI VET AT $\Delta t = 100s$ VAR TIDEN DET TOK PÅ KLOKKA MED HAST. $V_2 = 0{,}995$.
DA BRUKER VI RES. FRA OPPG. 8:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{100\,s}{\sqrt{1-0{,}995^2}} = 1001s$$

FRA JORDSYSTEMET. DA HAR VI

$$\underline{t_c = 1001s}$$

VELGER NÅ FØLGENDE TIDROMSINTERVALLER:

$$\Delta t_{BC}^2 - \Delta X_{BC}^2 = \Delta t''^2_{BC} - \Delta X''^2_{BC} \qquad (1)$$

FÅR DA NY UKJENT X''_B SOM VI ELIMINERER VED Å BRUKE

$$\Delta t_{AB}^2 - \Delta X_{AB}^2 = \Delta t''_{AB} - \Delta X''^2_{AB} \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (t_B - t_C)^2 - (V_1 t_B - V_2 t_C)^2 = 0 - X''^2_B$$

$$(2) \Rightarrow t_B^2 - V_1^2 t_B^2 = t''^2_c - X''^2_B$$

$$\hookrightarrow \underline{-X''^2_B = t_B^2(1-V_1^2) - t''^2_c}$$

SETTER INN I (1) $\Rightarrow (t_B - t_c)^2 - (V_1 t_B - V_2 t_c)^2 = t_B^2(1-V_1^2) - t''^2_c$

$$\cancel{t_B^2} + t_c^2 - 2t_B t_c - \cancel{V_1^2 t_B^2} - V_2^2 t_c^2 + 2V_1 V_2 t_B t_c = \cancel{t_B^2} - \cancel{V_1^2 t_B^2} - t''^2_c$$

$$\boxed{t_c = \frac{t''_c}{\sqrt{1-V_2^2}}}$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{t_c^2(1-V_2^2) + t''^2_c}{2t_c(1-V_1 V_2)} \approx \frac{\sqrt{1-V_2^2}}{1-V_1 V_2} t''_c \approx \underline{\underline{668s}}$$

9