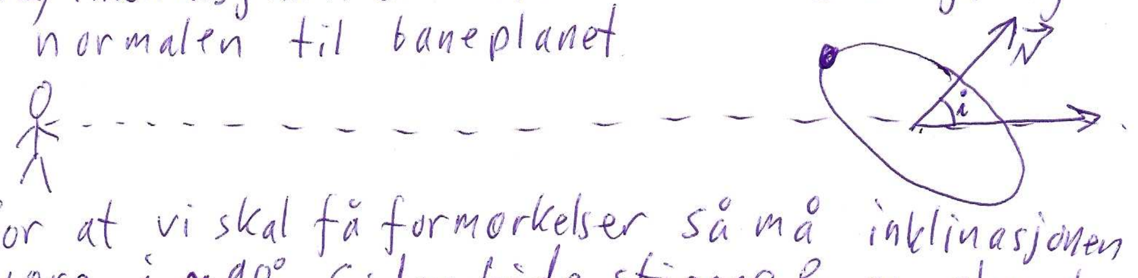
FASIT MIDTVEIS AST1100 2011 ①

1.1) Vi ser at planeten regelmessig formørker begge stjernene. Dette er kun mulig i den midterste konfigurasjonen.

Vi ser også at stjernene formørker hverandre mye oftere enn planeten formørker stjernene noe som betyr at stjernene går i bane nærmere hverandre, mens planeten går i bane lenger ut og dermed har lenger periode (fra Kepler 3).

1.2) Inklinasjonen er vinkelen mellom synslinja og normalen til baneplanet.



For at vi skal få formørkelser så må inklinasjonen være $i \approx 90°$. Siden både stjerne B og planeten formørker stjerne A, så må $i \approx 90°$ for begge.

1.3. se 1.2

1.4) Hastigheten til massesenteret får vi ved å se på hastighetskurven til stjerne A. Bevegelsen til stjerne A kan deles opp i bevegelsen omkring massesenteret + massesenterets bevegelse. I figur 2 ser vi at hastigheten

fluktuerer omkring -30 km/s som da er massesenterets hastighet. Negativt fortegn betyr at det kommer mot oss

2) Så lenge $M_B << M_A$ kan vi bruke uttrykket

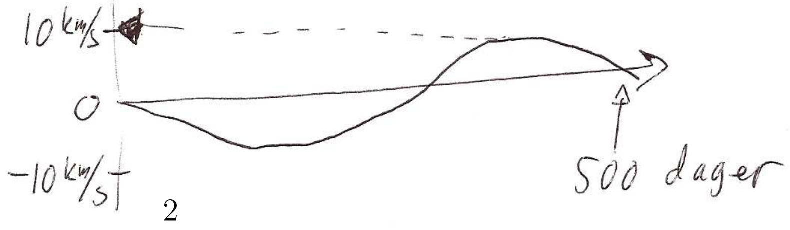
$$M_p \sin i = \frac{M_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

der M_p = massen til det minste objektet, i dette tilfellet stjerne B, M_* er massen til det største objektet, stjerne A, v_{*r} er maksimal radiell hastighet til stjerne A og P er omløpsperioden. Inklinasjonen i har vi sett er 90°. Da har vi:

$$M_B = \frac{M_A^{2/3} V_{Ar} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

Har oppgitt at $M_A = 0{,}7 M_\odot$

I figur 2 må vi trekke fra massesenterets hastighet. Da ser kurven for stjerne A omtrent sånn ut:



Leser av $V_{Ar} \approx 10$ km/s

Ser også at en periode er omtrent 500 dager.

Det gir $M_B \approx \underline{\underline{0{,}3 M_\odot}}$

(3)

3) Vi bruker igjen

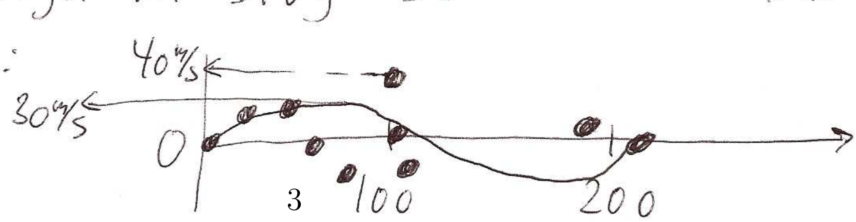
$$M_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} V_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

Nå er m_p = planetmasse og igjen har vi sett at $i \approx 90°$:

$$M_p \approx \frac{M_A^{2/3} V_{Ar} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

For å finne perioden kan vi først kikke på figur 1 hvor vi ser at planeten formørker stjerne A med en periode $P \approx 230$ dager

Så finner vi maksimal radiell hastighet fra nederste kurve i fig. 2: De største avvikene fra 0 er på ca. 40 m/s men når vi tar hensyn til støy så er nok $V_{r,max}$ litt mindre:

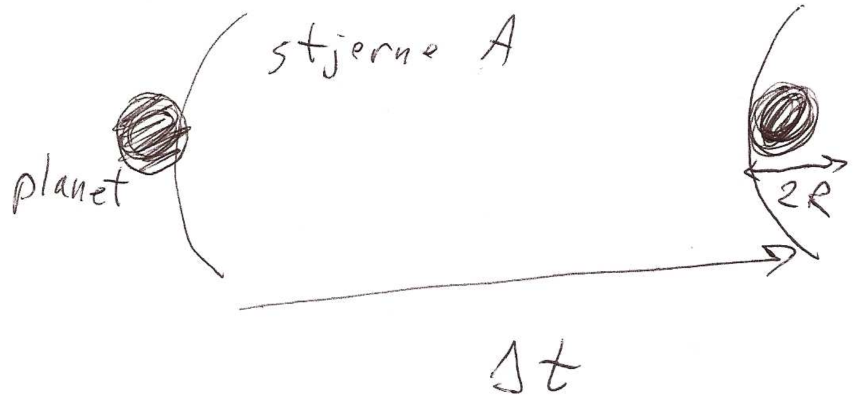


Anslår ved øyemål at $V_{Ar} \approx 30$ m/s men her er usikkerhetene store. Da har vi

$$M_p \approx \underline{0,7\ M_J}$$

④

4) Vi har nå massen til planeten, så vi mangler radiusen på å finne tettheten. Vi bruker kurven der planeten formørker A: Tiden det tar fra formørkelsen begynner til ~~B~~ lyskurven er på bunnen (planeten har kommet helt innenfor solskiven), Δt, kan hjelpe oss:



I løpet av Δt har planeten gått en avstand lik diameteren sin på $2R$ med en hastighet på $v_* + v_p$ i forhold til stjerna. Vi har fra formelsamling at $v_p = \frac{m_*}{m_p} v_*$ der v_p er planetens banehast om CM, v_* er stjernas banehastighet og $\frac{m_*}{m_p}$ er forholdet mellom stjerne og planet masse. v_* har vi allerede lest av.

Forts. av 4)

Da har vi $\quad$ vei = fart · tid

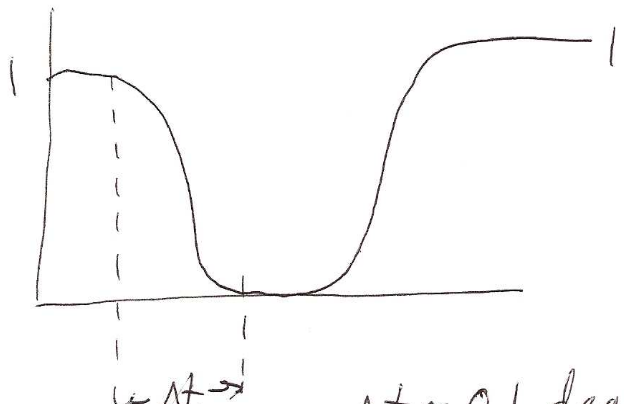
$$2R = (v_* + v_p) \cdot \Delta t$$

$$= (v_* + \frac{m_*}{m_p} v_*)\, \Delta t$$

$$R \approx \frac{1}{2} \frac{m_*}{m_p} \Delta t \, v_*$$

siden $m_* \gg m_p$.

Leser av fra kurven:



$\Delta t \approx 0{,}1$ dager

som gir ~~R ≈ 4500 km~~ $\underline{R \approx 136\,000 \text{km}}$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \underline{126 \text{ kg/m}^3}$$

Dette er mye mindre enn vann

Så det må være en <u>gass planet</u>

6

5) Vi skal løse 3-legemeproblemet numerisk. For hvert legeme skal vi løse en 2. ordens difflikning:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

hvor $\vec{F} = G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$ er krafta.

Vi løser den i to steg som to 1. ordens difflikninger: $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

løs for $\vec{v}$ ved å skrive om:

$d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}dt$ som oppdaterer $\vec{v}$ for hvert tidssteg.

Deretter har vi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

som gir $d\vec{r} = \vec{v}dt$ som oppdaterer posisjonen for hvert tidssteg dt

Fortsettelse av 5)

1. $rab = sqrt([r\_A(t-1) - r\_B(t-1)] . dot. [r\_A(t-1) - r\_B(t-1)])$

   = avstand A → B   dot-produkt

2. $rap = sqrt([r\_A(t-1) - r\_p(t-1)] . dot. [r\_A(t-1) - r\_p(t-1)])$

   = avstand A → p

3. $rbp = sqrt([r\_B(t-1) - r\_p(t-1)] . dot. [r\_B(t-1) - r\_p(t-1)])$

   = avstand B → p

4. $$F\_A = G \cdot mA \cdot mB \cdot [r\_B(t-1) - r\_A(t-1)] / rab^3 + G \cdot mA \cdot mp \cdot [r\_p(t-1) - r\_A(t-1)] / rap^3$$

5. $$F\_B = G \cdot mB \cdot mA \cdot [r\_A(t-1) - r\_B(t-1)] / rab^3 + G \cdot mB \cdot mp [r\_p(t-1) - r\_B(t-1)] / rbp^3$$

6. $$F\_p = G \cdot mp \cdot mA \cdot [r\_A(t-1) - r\_p(t-1)] / rap^3 + G \cdot mp \cdot mB [r\_B(t-1) - r\_p(t-1)] / rbp^3$$

7. $v\_A(t) = v\_A(t-1) + \frac{F\_A}{mA} dt$
8. $v\_B(t) = v\_B(t-1) + \frac{F\_B}{mB} dt$
9. $v\_p(t) = v\_p(t-1) + \frac{F\_p}{mp} dt$
10. $r\_A(t) = r\_A(t-1) + v\_A(t) dt$
11. $r\_B(t) = r\_B(t-1) + v\_B(t) dt$
12. $r\_p(t) = r\_p(t-1) + v\_p(t) dt$

(8)

6) Vi finner luminositeten til A, L_A.
Med den kan vi finne fluksen F_{inn} ved planeten i en avstand $r = 0{,}7$ AU fra stjerna:

$$F_{inn} = \frac{L_A}{4\pi r^2}$$

(total energi utstrålt delt på arealet $4\pi r^2$ den er fordelt på i avstand r)

Arealet som mottar strålingen er arealet av skiva med radius $R = 0{,}1\, R_J$ som planeten utgjør. Dette arealet er πR^2

Total energi som planeten mottar og dermed også stråler ut er $L_p = F_{inn} \cdot \pi R^2 = \underline{\frac{L_A}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$

Denne energien sendes ut fra arealet til hele overflaten til planeten $4\pi R^2$. Fluksen ut fra planeten er da $F_{ut} = \frac{L_p}{4\pi R^2} = \underline{\frac{L_A}{16\pi r^2}}$

Siden planeten er et sort legeme kan vi bruke Stefan-Boltzmanns lov:

$$F_{ut} = \sigma T^4 \Rightarrow T = \left(\frac{F_{ut}}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{L_A}{16\pi r^2 \sigma}\right)^{1/4}.$$

Da gjenstår å finne L_A:

Bruker igjen Stefan-Boltzmann: $L_A = F \cdot 4\pi R_A^2 = \sigma T_{eff}^4\, 4\pi R_A^2$

Forts. 6)

der R_A er radien til stjerne $A = 0{,}7 R_\odot$

og $T_{eff} = 4500K$

Da har vi $T = \left(\frac{L_A}{16\pi r^2 \sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{\sigma T_{eff}^4 4\pi R_A^2}{16\pi r^2 \sigma}\right)^{1/4}$

$$= T_{eff} \left(\frac{R_A^2}{4r^2}\right)^{1/4} = T_{eff}\sqrt{\frac{R_A}{2r}}$$

som innsatt gir $T \approx 217K = -56°C$

7) $x_A = 0,\ t_A = 0,\ x'_A = 0,\ t'_A = 0$

$x_B = L,\ t_B = \frac{L}{v},\ x'_B = 0,\ t'_B = ?$

$x_C = 0,\ t_C = ?,\ x'_C = vt'_C,\ t'_C = \frac{at'_B}{a-v}$

$x_D = vt_D,\ t_D = \frac{at_C}{a-v},\ x'_D = 0,\ t'_D = ?$

Finner t'_C: Posisjon til stråle på tidspunkt t': $x'_{str} = a(t' - t'_B)$

Posisjon til jorda på tid t': $x'_{jord} = -vt'$

event C: $x'_{str}(t' = t'_C) = x'_{jord}(t' = t'_C)$

$a(t'_C - t'_B) = -vt'_C \Rightarrow t'_C = \frac{at'_B}{a-v}$

Tilsvarende for t_D: $x_{str} = a(t - t_C)$

$x_{romskip} = vt$

$x_{str}(t = t_D) = x_{romskip}(t = t_D)$

$a(t_D - t_C) = vt_D \Rightarrow t_D = \frac{at_C}{a-v}$

⑩

8) Vi skal finne t_B' og t_D':

Bruker $\Delta S_{AB}^2 = \Delta S_{AB}'^2$

$$\Delta t_{AB}^2 - \Delta x_{AB}^2 = \Delta t_{AB}'^2 - \Delta x_{AB}'^2$$

$$\frac{L^2}{v^2} - L^2 = t_B'^2 \Rightarrow t_B'^2 = L^2\,\frac{1-v^2}{v^2} = \frac{L^2}{\gamma^2 v^2}$$

$$\underline{\underline{t_B' = \frac{L}{\gamma v}}} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Trenger t_C for å finne t_D':

$$\Delta S_{AC}^2 = \Delta S_{AC}'^2$$

$$\Delta t_{AC}^2 - \Delta x_{AC}^2 = \Delta t_{AC}'^2 - \Delta x_{AC}'^2$$

$$t_C^2 = \frac{a^2 t_B'^2}{(a-v)^2}(1-v^2) \Rightarrow \underline{t_C = \frac{a\,t_B'}{\gamma(a-v)}}$$

Finner t_D': $\Delta S_{AD}^2 = \Delta S_{AD}'^2$

$$\Delta t_{AD}^2 - \Delta x_{AD}^2 = \Delta t_{AD}'^2 - \Delta x_{AD}'^2$$

$$\frac{a^2 t_C^2}{(a-v)^2}(1-v^2) = t_D'^2 \Rightarrow \underline{\underline{t_D' = \frac{a\,t_C}{\gamma(a-v)}}}$$

Setter inn tall: $t_B' = \frac{180\,\text{ly}}{0{,}95\cdot\gamma} = \underline{\underline{59\text{ år}}}$

$$t_D' = \frac{a}{\gamma(a-v)}\cdot\frac{a\,t_B'}{\gamma(a-v)} = \frac{a^2}{\gamma^2(a-v)^2}\,t_B' = \underline{\underline{6.3\text{ år}}}$$

Merkelig: Astronautene mottar svaret mange år før de sendte spørsmålet.

9) Vi vet at $P_\mu = mV_\mu = m\gamma(1, \vec{v})$

Ser bort ifra y og z-retn:

$$P_\mu = (m\gamma, m\gamma v_x)$$

$$P_\mu(\text{romskip } 1) = \underline{\underline{m_1\gamma_1(1, v_1)}}$$

hvor $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}$

$$P_\mu(\text{romskip } 2) = \underline{\underline{m_2\gamma_2(1, -v_2)}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}$$

$$P'_\mu(\text{romskip } 1) = \underline{\underline{(m_1, 0)}}$$

siden romskip 1 står i ro i merket syst.

10) Transformerer P_μ(romskip 2) til det merkede syst.

$$P'_\mu = C_{\mu\nu}P_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -v_1\gamma_1 \\ -v_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_2\gamma_2 \\ -m_2\gamma_2 v_2 \end{pmatrix}$$

den rel. hast. til det merkede syst i forhold til det umerkede er v_1

Vi er interessert i total relativistisk bev.mengde som er bevart i kollisjonen. Det er derfor nok å ta summen før kollisjonen. Romskip 1 har ingen bev.mengde i merket system. $P'_{\text{relativistisk}}$ er derfor kun siste element av $P'_\mu(2)$: $P_{\text{relativistisk}} = \underline{\underline{-v_1\gamma_1 m_2\gamma_2 - \gamma_1 m_2\gamma_2 v_2}}$