FASIT H2014 AST1100 ①

1.1) Vet at løsning av 2-legemeproblemet gir (antar ellipse slik oppgaven sier):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

Retningen til posisjonsvektoren er ifølge oppgaven $\vec{e}_r$. Dermed har vi:

$$\vec{r}_1 = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos f}\vec{e}_r$$

1.2) Jordas posisjonsvektor danner vinkelen θ med Saturns store halvakse og dermed med $\vec{e}_x$.
Da får vi

$$\vec{r}_2 = r_{jord}\cos\theta\,\vec{e}_x + r_{jord}\sin\theta\,\vec{e}_y$$

Vi må finne r_{jord} = avstand sol-jord

Igjen har vi $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$ med $a = a_2$, $e = e_2$

Vinkelen mellom store halvakse i jordas bane og pos.vektoren er $f = \theta+\alpha+\pi$ fra figuren.

Dermed har vi $\vec{r}_2 = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1-e_2\cos(\theta+\alpha)}\left[\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right]$

minus

$\cos(\theta+\alpha+\pi) = -\cos(\theta+\alpha)$

1.3) Avstanden vi skal finne er jo avstanden mellom posisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$:

$$d = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

Vi skriver først $\vec{r}_1$ ut ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$:

$$\vec{r}_1 = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos f}\left[\cos f\,\vec{e}_x + \sin f\,\vec{e}_y\right]$$

Vi får da:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overbrace{\left[\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos f}\cos f - \frac{a_2(1-e_2^2)}{1-e_2\cos(\theta+\alpha)}\cos\theta\right]}^{\equiv A}\vec{e}_x$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos f}\sin f - \frac{a_2(1-e_2^2)}{1-e_2\cos(\theta+\alpha)}\sin\theta\right]}_{\equiv B}\vec{e}_y$$

Og dermed $\quad d = \sqrt{A^2+B^2}$

Ser da at

$$x = \cos f \qquad y = \cos\theta$$

$$w = -\cos(\theta+\alpha) \qquad z = \sin f$$

$$v = \sin\theta$$

FASIT H2014 AST1100 ③

2) Na = 100 (antall testverdier for a_0)

$$dao = \frac{aomax}{Na-1} \quad \text{(steg for ao)}$$

FOR i = 0, Na − 1 (løkke over ao)

ao = dao · i

r_s(0) = rs_init
r_p(0) = rp_init
v_s(0) = vs_init
v_p(0) = vp_init

(iniatiliser pos. og hast.)

FOR j = 0, N − 1 (løkke for banebevegelse)

$$as = -G\frac{\cancel{ms}\cdot msol}{norm(r\_s(j))^3}\, r\_s(j) + ao \quad \text{(akselrasjon satelitt)}$$

$$ap = -G\frac{\cancel{mp}\cdot msol}{norm(r\_p(j))^3}\, r\_p(j) \quad \text{(— " — Saturn)}$$

v_s(j) = v_s(j−1) + as · deltat
v_p(j) = v_p(j−1) + ap · deltat
r_s(j) = r_s(j−1) + v_s(j) · deltat
r_p(j) = r_p(j−1) + v_p(j) · deltat

(oppdater pos. og hast.)

IF norm(r_s(j) − r_p(j)) ≤ r_saturn THEN ao_final = ao
EXIT LOOP

IF norm(r_s(j)) > rp_max THEN ao_final = 0

ENDFOR

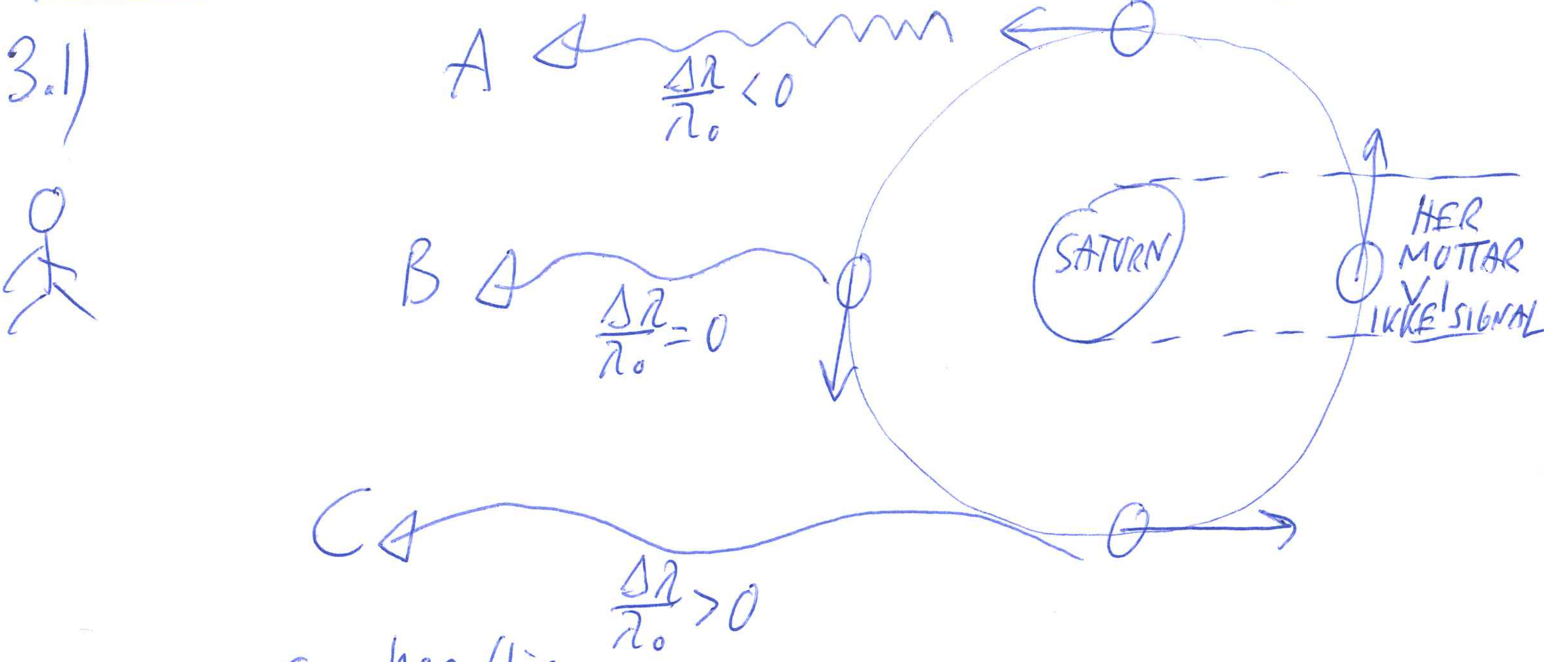
IF ao_final ≠ 0 THEN EXIT LOOP

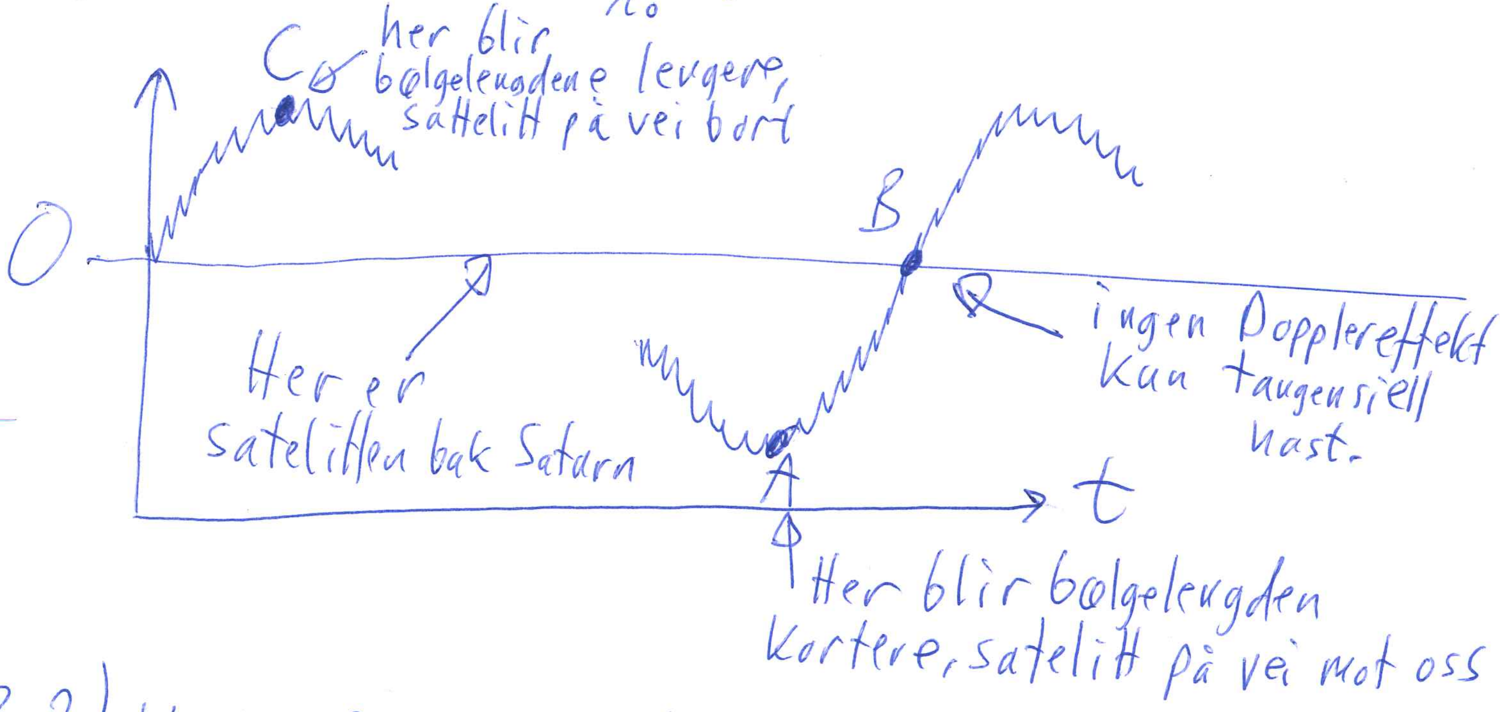
ENDFOR

ao = ao_final

FASIT H2014 AST1100 (4)

3.1)





3.2)

Kepler 3: $$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$$

a = baneradius til satelitt i bane rundt Saturn

P = omløpsperiode

$m_1 + m_2 = M_{saturn} + M_{satelitt} \approx M_{saturn}$

$\Rightarrow$ leser av på figur $P \approx 5$ timer

$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{G M_{saturn} \cdot P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx \underline{68\,000 \text{ km}}$$

Sirkelbane $$V = \frac{2\pi a}{P} \approx \underline{23 \text{ km/s}}$$

ALTERNATIV MÅTE:

$$\frac{V}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$V = \frac{2{,}3\text{m}}{30\text{km}} c \approx \underline{23 \frac{\text{km}}{\text{s}}}$$

FASIT H2014 AST1100 ⑤

4.1) Stefan-Boltzmannslov:

$$F = \sigma T^4 \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (5780)^4 \frac{W}{m^2} = \underline{63 \frac{MW}{m^2}}$$

Dette er fluks $= \frac{\text{energi}}{\text{areal} \cdot \text{tid}}$

Finner Luminositet $= \frac{\text{energi}}{\text{tid}}$ ved å multiplisere med ~~det~~ arealet til hele solens overflate.

Da finner vi totalt utstrålt energi per tid

$$L = 63 \frac{MW}{m^2} \cdot 4\pi (6.98 \cdot 10^8 m)^2 = \underline{\underline{3,87 \cdot 10^{26} W}}$$

4.2) Fluks ved Saturn:

$F = \frac{L}{A}$ der A = areal av kula med radius lik avstanden Sol-Saturn

All energien fordeles uti dette skallet ved denne avstanden: $F = \frac{3.87 \cdot 10^{26} W}{4\pi r^2} = \underline{15 \frac{W}{m^2}}$

Med virkningsgrad 12% trenger vi da

$$A = \frac{E}{F \cdot 0.12} = \frac{100W}{15 \cdot 0,12 \frac{W}{m^2}} = \underline{\underline{56 m^2}}$$

5) Vet at $P_\mu = \gamma (m, \vec{p})$ hvor $\vec{p} = m\vec{v}$

Fra protonets system så står protonet i ro:

$V = 0$ og $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1$

Dermed P_μ (protonsystem) $= \underline{(m_{proton}, 0)}$

5 forts.

Fra satelittens system: $v = 0{,}995$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}995^2}} \approx \underline{10}$

Legger x-aksen langs protonets retning:

$$\underline{\underline{P_\mu = 10 \cdot m_{proton} \cdot (1, 0.995)}}$$

6)

Fra satelittens ref-syst så er

$$P_\mu(\text{innkomne proton}) = \gamma_{99} \cdot m_{proton}(1, -0.99)$$

$$\gamma_{99} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-0{,}99^2}} \quad \text{definerer også} \quad \gamma_{995} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}995^2}}$$

Vi skal nå transformere denne fra satelittens ref-syst. til den utsendte strålens ref-syst. Da har vi en relativ hastighet mellom de to systemene på $v_{rel} = 0.995$

$$P_\mu^{(\text{utsendt stråle ref-syst})}(\text{inkomne proton}) = \begin{pmatrix} \gamma_{rel} & -v_{rel}\gamma_{rel} \\ -v_{rel}\gamma_{rel} & \gamma_{rel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{99} m_{proton} \\ \gamma_{99} m_{proton} \cdot (-0.99) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{995}\gamma_{99} m_{proton} + 0.995 \cdot 0.99\, \gamma_{995}\gamma_{99} m_{proton} \\ -0.995\,\gamma_{995}\gamma_{99} m_{proton} - 0.99\,\gamma_{995}\gamma_{99} \cdot m_{proton} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\gamma_{995}\gamma_{99} m_{proton} \begin{pmatrix} 1.985 \\ -1.985 \end{pmatrix}}}$$

Energi som protonet har vunnet sett fra utsendt stråles ref-sys:

$$\Delta E = E_{nå} - E_{før} = \gamma_{995}\gamma_{99} m_{proton} \cdot 1.985 - m_{proton} = \underline{\underline{139.9\, m_{proton}}}$$

Kan evt. gi svar i Joule: $\Delta E = 139.9\, m_{proton} c^2 = \underline{2 \cdot 10^{-7} J}$