FASIT MIDTVEISEKSAMEN AST2000 H2018

1) Vet at midlet av en funksjon ~~av en~~ $f(x)$ av en tilfeldig variabel x med sannsynlighetstetthet $P(x)$ er

$$\langle f(x)\rangle = \int dx\, f(x)\, P(x)$$

Her er hastighet v variabelen og kinetisk energi $\frac{1}{2}mv^2$ er funksjonen:

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2\, P(v)\, dv = \underline{\underline{\frac{1}{2}m\int_0^\infty v^2 P(v)\, dv}}$$

2) Total energi til 2-legeme-systemet tatt i massesentersystemet er

$$E = \frac{1}{2}m_1 {v_1^{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2^{CM}}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

der m_1 og m_2 er massene til legemene og v_1^{CM} og v_2^{CM} er hastighetene i forhold til massesenteret.

2

2) fortsetter

Formelsamlingen gir oss sammenhengen mellom posisjonene til legemene fra masseseneteret $\vec{r}_1^{CM}$ og $\vec{r}_2^{CM}$ og posisjonen $\vec{r}$ til det ene legemet fra det andre som $\vec{r}_1^{CM} = -\frac{\hat{\mu}}{m_1}\vec{r}$, $\vec{r}_2^{CM} = \frac{\hat{\mu}}{m_2}\vec{r}$

Deriverer vi disse mhp. tiden og bruker at hastighet er tidsderivert av pos.:

$$\vec{V}_1^{CM} = -\frac{\hat{\mu}}{m_1}\vec{V} \quad \text{og} \quad \vec{V}_2^{CM} = \frac{\hat{\mu}}{m_2}\vec{V}$$

der $\vec{V}$ er hast. til det ene legemet i forhold til det andre.

Insatt i den første likningen vår får vi

$$E = \frac{1}{2}m_1 \cdot \frac{\hat{\mu}^2}{m_1^2}V^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{\hat{\mu}^2}{m_2^2}V^2 - G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\mu}^2 V^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bruker nå $\hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$:

$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}V^2 - G\frac{\hat{\mu}M}{r^2} \quad \text{som vi skulle finne}$$

3) Når vi detekterer planeter med radielle hastighetskurver så bruker vi hastigheten til <u>stjerna</u> observert langs synslinja. Når vi trekker fra egenhast. (pekuliar velocity) får vi hast. i forhold til massesenteret. Jo større hast. stjerna har i forhold til massesenter, jo lettere å oppdage!

Vi vet fra Keplers 3. lov $P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$

der P er omløpshastighet og a er radien i sirkelbanen hvis vi antar sirkelbane

at jo mindre a (nærmere stjerna) jo kortere omløpsperiode og dermed høyere banehastighet. Merk at Kepler 3 gjelder for banen til det ene legemet rundt det andre, men perioden P er også perioden til stjerna omkring massesenteret, dermed er konklusjonen også gyldig for stjernas banehast. om CM

4.1) For et sort legeme vet vi at (4)
strålingsfluksen fra overflaten er gitt ved $F = \sigma T^4$ der σ er en konstant (formelsamling). Fluks er utstrålt (i dette tilfellet) energi per areal per tid. For å finne totalt utstrålt energi per tid (luminositet) må vi dermed gange opp med hele arealet som stråler, altså overflaten $4\pi R^2$ til stjerna:

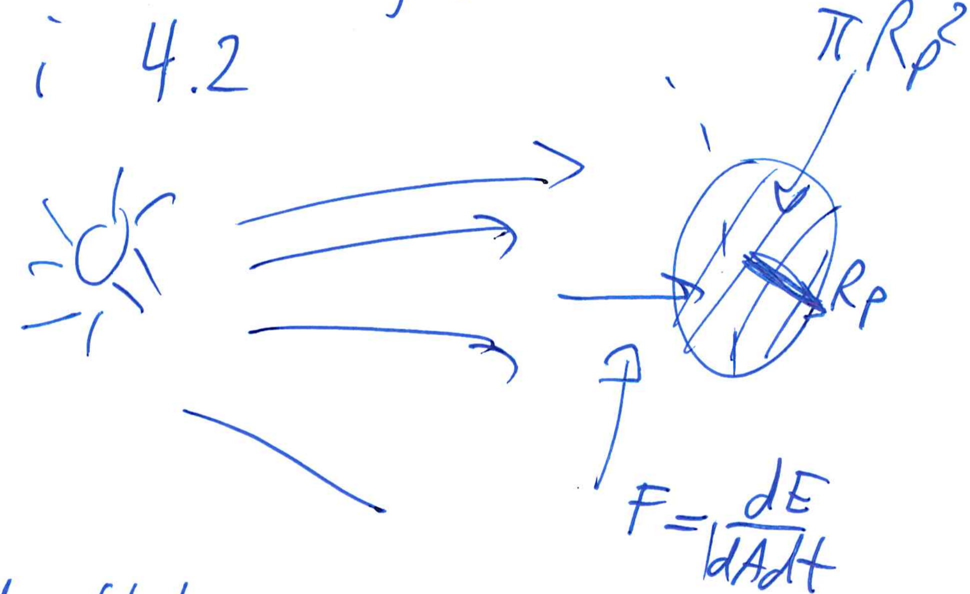
$$\underline{L = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}$$

4.2) Strålingen fordeler seg jevnt utover ~~s~~ i alle retninger fra stjerna. I en avstand r fra stjerna så har ~~energien~~ strålingen fordelt seg i et kuleskall med overflate $4\pi r^2$. Vi finner dermed fluksen ved å dele hele energien som er utstrålt på arealet som strålingen fordeler seg over

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

5

4.3) Vi bruker hintet og antar at hele skiven med radius R_p og dermed arel πR_p^2 mottar fluksen som vi regnet ut i 4.2



Ganger dermed fluksen opp med arealet som den treffer for å finne totalt mottat energi per tid

$$\text{Energi mottat per tid} = F_{\text{mottat}} \cdot \pi R_p^2$$
$$= \underline{\underline{\sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \pi R_p^2}}$$

4.4) Som i 4.1: Antar vi at planeten er et sort legeme så stråler den ut $F = \sigma T_{\text{planet}}^4$ som er energi per areal per tid. For likevekt vet vi at total energi per tid som den stråler ut må være lik det som den mottar fra 4.3

4.4. fortsetter

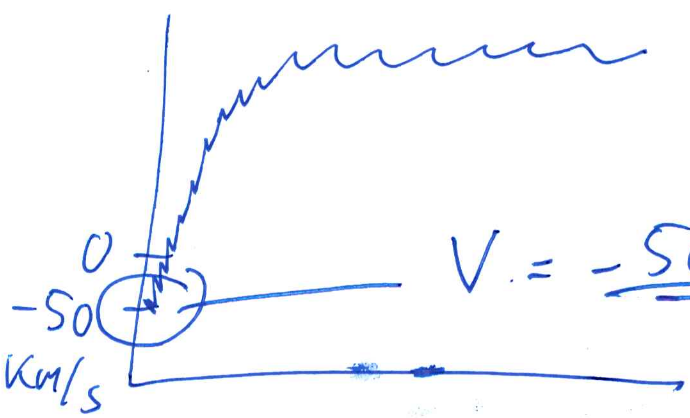
Totalt utstrålt energi per tid: $\sigma T_{planet}^4 \cdot 4\pi R_p^2$

$=$ mottatt energi per tid $\sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \pi R_p^2$

$$\Rightarrow \cancel{\sigma} T_{planet}^4 \cdot 4\cancel{\pi} \cancel{R_p^2} = \cancel{\sigma} T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cancel{\pi} \cancel{R_p^2}$$

$$\underline{\underline{T_{planet} = T \left(\frac{R^2}{4r^2}\right)^{1/4}}}$$

5.1) Egenhastigheten, altså massesenterets hastighet leser vi av fra galaksesenteret altså $r=0$. Vi kan for en galakse anta at massesenteret er omtrent i det geometriske senteret da massen er symmetrisk fordelt rundt senteret.



$V = \underline{-50\,km/s}$

mot oss

5.2) Vi ser at kurven ikke faller av slik den hadde gjort hvis all materie hadde vart samlet i de sentrale delene av galaksen. Fordelingen av stjerner i galakser indikerer at massen (i stjerner) er samlet i de sentrale delene, men for at rotasjonskurven skal holde seg flat må det være mer materie til stede i de ytre lagene som bidrar til ekstra gravitasjonskrefter som gjør at objekter langt ut i galaksen har en betydelig større banehastighet enn forutsagt. Vi kaller denne ekstra materien for mørk materie da vi ikke kan se noe materie som avgir stråling som kan forklare dette.