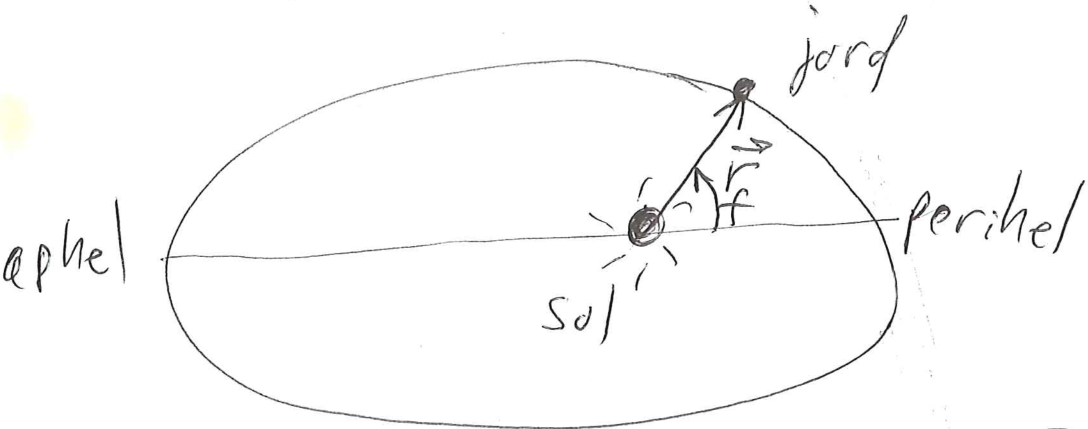
FASIT MIDTVEIS AST2000 2019 (1)

1) Sannsynligheter er multiplikative hvis de er uavhengige:

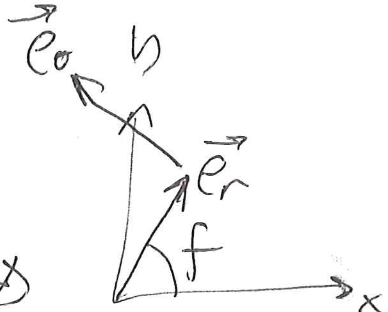
$$p^4(1-p)^3$$

2.1)



Vet at $\vec r = r\vec e_r$

Hastighet: $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \underbrace{\dot r \vec e_r}_{\text{radiell komponent}} + r\dot{\vec e}_r$



$\vec e_r = \cos f\,\vec e_x + \sin f\,\vec e_y$

$\dot{\vec e}_r = -\dot f \sin f\,\vec e_x + \dot f \cos f\,\vec e_y = \dot f\,\vec e_\theta$

Dermed: $r\dot{\vec e}_r = \underbrace{r\dot f}_{\text{tangensiell komponent } v_\theta}\vec e_\theta$

2.2) Fra Keplers 2. lov, vet vi at hastigheten til en planet er størst nærmest sola (altså i perihel $f=0$) og minst lengst mulig vekk (altså aphel $f=\pi$)

2.3) $h = \left|\frac{\vec{r}\times\vec{p}}{m}\right|$ Vet at $\vec{r} = r\vec{e}_r$

$\vec{p} = m\vec{v} = m(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta)$

$$= \left| r\vec{e}_r \times (v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta)\right| = \left|r v_\theta \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta\right| = \underline{\underline{r v_\theta}}$$

paralelle enhetsvektorer: $\underline{|\vec{e}_r \times \vec{e}_r| = 0}$

ortogonale enhetsvektorer $\underline{|\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta| = 1}$

Vet også $\underline{h = \sqrt{p\,G(m_j + m_\odot)}}$ (oppgitt)

For ellipse : $p = a^2(1-e^2)$

Dermed: $h = h$

$$\underbrace{\sqrt{a(1-e^2)G(m_j+m_\odot)}}_{\text{Spinn per masse er bevegelse\underline{konstant}}} = r_{perihel} \cdot v_{\theta,perihel}$$

skal finne hastighet i perihel

Vet at $r_{perihel} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f_{perihel}} = a(1-e^2)$

fordi $\underline{f_{perihel} = 0}$ (fra def.)

Dermed: $\sqrt{a(1-e^2)G(m_j+m_\odot)} = a(1-e^2)\,v_{\theta,perihel}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_{\theta,perihel} = \sqrt{\frac{G(m_j+m_\odot)}{a(1-e^2)}}}}$$

FASIT MIDTVEIS AST2000 2019 3

3) Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_* + m_p)} a^3$$

Sirkelbaner: $v = \frac{2\pi a \leftarrow \text{strekning}}{P \leftarrow \text{tid}}$

$$\Rightarrow P = \frac{2\pi a}{v \leftarrow \text{hastighet til et objekt i forhold til det andre}}$$

Innsatt: $\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_* + m_p)} \Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{G(m_* + m_p)}{a}}}$ (1)

ALTERNATIVT: For sirkulærbaner er hastigheten konstant. Da kan vi bruke uttrykket for tangensial hast. som vi fant i 2.3 med $e=0$ (sirkulærbane): Det gir også $\underline{v = \sqrt{\frac{G(m_p + M_\odot)}{a}}}$ (1)

(for sirkulærbaner er $v_r = 0$!)

Dette er hastigheten til et legeme i forhold til det andre.

Vi deriverer $\vec{r}_1^{\,cm} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \Rightarrow \vec{v}_1^{\,cm} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$

Antar $1 = *$, $2 = \text{planet}$: $v_*^{cm} = \frac{m_p}{m_* + m_p} v$. Innsatt i (1) gir

$$v_*^{cm} = \frac{m_p}{m_* + m_p}\sqrt{\frac{G(m_p + m_*)}{a}} = m_p\sqrt{\frac{G}{a(m_p + m_*)}} \approx \underline{3\,\text{m/s} > 1\,\text{m/s}}$$

$\underline{\text{KAN OPPDAGES!}}$

ANTAR KUN 2-legemer

$m_p = 5{,}86 \cdot 10^{26}\,\text{kg}$, $a = 1{,}433 \cdot 10^{12}\,\text{m}$, $m_* = 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$

4) Forhold mellom tilsynelatende størrelsesklasse for to objekter:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{F_1}{F_2}$$ ← fluks fra objektene

Vi bruker sola som sammenlikning siden vi kjenner tilsynelatende størrelsesklasse for sola: $\underline{m_\odot = -26{,}7}$

Mottat fluks for objekt i avstand r med lum. L:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \Rightarrow 30 - m_\odot = -2{,}5 \lg \frac{\cancel{L_\odot}/r^2}{\cancel{L_\odot}/r_\odot^2}$$

$$\Rightarrow 10^{30-m_\odot} = \left(\frac{r_\odot^2}{r^2}\right)^{-2{,}5} \Rightarrow \frac{r_\odot^2}{r^2} = 10^{\frac{30-m_\odot}{-2{,}5}}$$

$$\Rightarrow r = r_\odot 10^{\frac{30-m_\odot}{5}} = 1\,AU \cdot 10^{\frac{56{,}7}{5}} \approx \underline{3{,}5 \text{ millioner ly}}$$

5.1) ~~$\mu = 0{,}78 \cdot 14 \cdot 2m_H + 0{,}21 \cdot 16 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 40 =$~~

$$\mu = 0{,}78 \cdot 14 m_H \cdot 2 + 0{,}21 \cdot 16 m_H \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 40 m_H = \underline{29\, m_H}$$

Antar $\underline{m_p = m_n = m_H}$

5.2) Hydrostatisk likevekt $\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) g(r)$

Ideel gass: $P(r) = n(r) k \cdot T$

$\rho(r)$ er massetetthet, $n(r)$ er antall tetthet

FASIT MIDTVEIS AST2000 2019 (5)

Hvis en partikkel i middel veier $\mu \cdot m_H$:

$$\rho(r) = \cancel{\mu m_H n(r)} \; \mu m_H n(r)$$

Ideel gasslov gir da: $\rho(r) = \frac{\mu m_H}{kT} P(r)$

Insatt i hydrostatisk likevekt:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g \frac{\mu m_H}{kT} P(r)$$

$$\Rightarrow \frac{dP(r)}{P(r)} = -g \frac{\mu m_H}{kT} dr$$

Integrerer fra $r = h_0$ til h:

$$\int_{P(h_0)}^{P(h)} \frac{dP(r)}{P(r)} = -g \frac{\mu m_H}{kT} \int_{h_0}^{h} dr$$

$$\ln P(h) - \ln P(h_0) = g \frac{\mu m_H}{kT} (h_0 - h)$$

$$\Rightarrow \frac{P(h)}{P(h_0)} = e^{g \frac{\mu m_H}{kT}(h_0 - h)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(h) = P(h_0)\, e^{\frac{g \mu m_H}{kT}(h_0 - h)}}}$$