Oppgave 1A.8: En forenklet kode for stjernedannelse

P. Leia
Institute of Theoretical Astrophysics, University of Oslo,
P.O. Box 1029 Blindern, 0315 Oslo, Galactic Empire[*]
(Dated: 15. august 2019)

Vi har laget en forenklet simulering av stjernedannelse for en stjerne med samme masse som solen. Vi starter med en gass med temperatur 20K jevnt fordelt utover i en kule med radius 2.5×10^{11}m og total masse på en solmasse. Vi deler gass-skyen opp i 500 partikler med like stor masse og simulerer bevegelsen til disse i tidssteg på 10^{-5} år. Etter et halvt år har skyen kollapset til en radius på 1.5 solradier og temperatur 541.000K og har dermed enda ikke begynt fusjonsreaksjoner. Metoden vår for å simulere stjernekollaps er rask da det kun tar noen minutter å simulere et halvt år, men tilnærmingen har noen begrensninger.

I. INTRODUKSJON

Stjerner fødes fra store molekylære gass-skyer som trekker seg sammen på grunn av gravitasjonskrefter. De ytterste delen av gassen merker gravitasjon fra all gassen på innsiden og begynner derfor å falle innover mot sentrum. Gass-skyen blir da tettere og varmere. Til slutt vil temperaturen i sentrum bli stor nok for kjernereaksjoner og vi har fått dannet en stjerne. I denne artikkelen skal vi simulere denne prosessen.

II. METODE

Vi trenger å redusere antall partikler som skal simuleres betydelig for å gjøre beregningene raske nok. Vi velger N partikler, der N typisk kan være av størrelseorden 50-500. Dette er en enorm reduksjon i antall partikler. Vi trenger å passe på at disse få partiklene skal sette opp gravitasjonsfeltet, men samtidig være lette gasspartikler. Vi løser dette ved å la partiklene ha masse $M = M_{\text{tot}}/N$, hvor M_{tot} er totalmassen til gass-skya, når gravitasjonsfeltet skal beregnes og $M = m_H$, hydrogenmassen, når egenskaper til gassen skal diskuteres.

Vi kommer til å trenge å finne temperaturen til gassen på gitte tidspunkt i simuleringen. Vi summer opp den totale kinetiske energien til partiklene samt bruke at disse i middel skal være $\frac{3}{2}kT$ (se oppgave A1.5 i [1]) så finner vi utgangstemperaturen til gassen:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_H v_i^2 = \frac{3}{2}kT$$

hvor k er Boltzmannkonstanten og v_i er farten til partikkel i, som gir

$$T = \frac{m_H}{3kN}\sum_{i=1}^{N} v_i^2.$$

Vi trenger også å finne radiusen til gass-skya på forskjellige tidspunkter. Dette gjør vi ved å ta midlet til avstanden r fra sentrum for alle partiklene.

For å bevege partiklene i simuleringen, så trenger vi først å beregne gravitasjonsakselrasjonen for å finne endring i hastighet, og deretter oppdatere hastigheten for å beregne ny posisjon. Vi bruker Eulers metode til å bevege partiklene. En gitt partikkel i har posisjonsvektor $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Partikkelen har hastighetsvektor

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{1}$$

De eneste kreftene som virker på partiklene er gravitasjonskrefter fra alle andre partikler i gassen. Siden hele gass-skya er kuleformet, så kan vi for en gitt partikkel i dele opp alle de andre partiklene i (1) de som ligger i kuleskallet på utsiden av partikkel i og (2) de som ligger i kula (med sentrum i origo) på innsiden av partikkel i. Vi antar at gass-skya har jevn tetthet. Siden et kuleskall med jevn tetthet ikke virker med gravitasjonskrefter på det som er inne i skallet (som opplyst i [1]), så kan vi se bort fra alle partikler på utsiden av i. Kula av alle partikler som er på innsiden av i har en totalmasse $M(r_i)$ hvor r_i er avstanden til partikkel i fra origo ($r_i = |\vec{r}_i|$). Fra Newtons gravitasjonslov for krafta på partikkel i kombinert med Newtons 2.lov så gir dette oss

$$d\vec{v}_i = -G\frac{M(r_i)m}{r^3}\vec{r}_i dt$$

der $d\vec{v}_i$ er en liten endring i hastighetsvektoren som vi bruker til å oppdatere hastighet.

I tilegg må vi ta hensyn til friksjon: Når ladde partikler akselereres så gir de fra seg energi i form av stråling, og de bremses dermed ned. I tillegg vil trykk fra gassen på innsiden samt fra strålingen som produseres gjøre at partiklene på vei inn kolliderer og dermed bremses. Dette tar vi hensyn til ved å bruke:

$$\frac{\Delta\vec{v}_{\text{fric}}}{\Delta t} = -K\rho|\vec{v}|\vec{v}$$

hvor $|\vec{v}|$ er absoluttverdien til hastighetsvektoren til partikkelen og

```
K=1.3e-9
```

* pleia@astro.uio.galemp

Relativt antall partikler i skallet der partikkelen befinner seg betegnes med $\rho = N_{\mathrm{skall}}/N$.

Vi kan videre bruke likning 1 til å oppdatere posisjon til partikkelen:

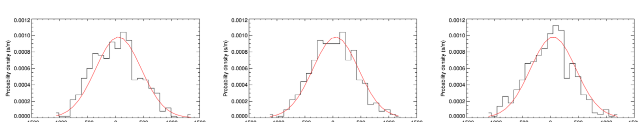
$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt.$$

Merk at vi har delt gass-skya inn i 100 kuleskall og behandler alle partikler innen et gitt kuleskall på samme måte. Alle partikler innen et gitt kuleskall blir antatt å bli påvirket av massen til alle partikler i alle kuleskall på innsiden, men ikke fra det gitte kuleskallet. I det innerste kuleskallet (som er en kule) antar vi at det ikke virker gravitasjonskrefter. Når det etterhvert blir mange partikler her så bryter antakelsen vår sammen.

Algoritmen som har blitt brukt i denne artikkelen starter med et sett med utgangsposisjoner og hastigheter for partiklene og utvikler deretter disse posisjonene fremover i tid under påvirkning av tyngdekraft. Etter hvert tidssteg så blir ny temperatur og radius for skya beregnet.

III. RESULTATER

Totalmassen til gass-skya er 1 solmasse fordelt på 500 partikler. Vi brukte utgangsposisjoner og hastigheter tatt fra tidligere arbeider [1] og bruker, som forklart i forrige avsnitt, kinetisk energi til å finne at temperaturen til gass-skya er $T = 20$K. I figur 1 viser vi et histogram av hastighetene til partiklene i x, y og z-retning separat. Vi antar at gassen er ideel noe som betyr at hastighetene skal følge Maxwell-Boltzmann-fordelingen. For å kontrollere at dette stemmer, har vi plottet Maxwell-Boltzmann-fordelingen for $T = 20$K på toppen av histogrammene og får bekreftet at vi har en ideel gass. Vi hadde litt problemer med a få plottet riktig i starten helt til vi innså at histogrammet måtte normaliseres slik at integralen under kurven blir 1 på samme måte som Maxwell-Boltzmann-fordelingen.

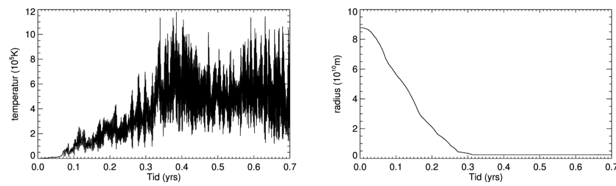


Figur 1. Histogram av hastighetskomponentene i x, y og z-retning

For å gjøre beregningene raskere, så velger vi å kjøre simuleringen med kun 50 partikler. Vi kjører så simuleringen i 70.000 tidssteg. I figur 2 ser vi hvordan midlere radius og temperatur til skya utvikler seg med tiden og til slutt stabiliserer seg på en radius som tilsvarer 1.4 ganger solradien. Vi finner at slutt-temperaturen er

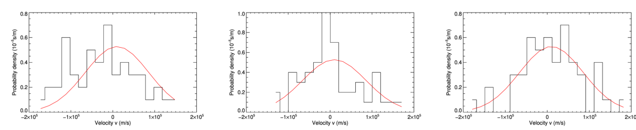
```
temp=5.41243374997766544e+5
```

Kelvin som er for lavt til at fusjonsreaksjoner kan sette igang.



Figur 2. Temperatur og radius til skya som funksjon av tida

I figur 3 så viser vi histogrammet til hastighetsfordelingene til partiklene etter simuleringen samt et plott av Maxwell-Boltzmann-fordelingen for temperaturen som partiklene har i siste tidssteg. Vi ser at gassen enda oppfører seg tilnærmet som en ideel gass.



Figur 3. Histogram av hastighetskomponentene i x, y og z-retning.

Vi ser at størrelsen på gass-skya og temperaturen har stabilisert seg uten at vi har fått dannet en stjerne. Årsaken til dette finner vi når vi innser at radien på det innerste skallet vårt likner radien til skya. Som beskrevet over, så beregner algoritmen vår ikke gravitasjonskrefter for partiklene i det innerste skallet. Dermed vil radien aldri kunne krympe videre.

Til slutt kjører vi koden på nytt uten friksjonsledd. Så lenge det ikke er noe som bremser partiklene, så vil vi tro at de faller innover mot sentrum, men så kommer ut igjen med samme hastighet. Det blir som banebevegelser i et fler-legeme-system. Kanskje vil radien endres litt, men det er ikke gitt at vi får kollaps til en mye mindre radius. Dette stemmer godt med det som vi ser i simuleringa.

IV. DISKUSJON

I koden har vi gjort flere antakelser og tilnærmelser som gir urealistiske resultater. Som allerede diskutert over, så vil simuleringen bryte sammen når alle partiklene er samlet i den innerste kula. Da trenger vi flere skall eller en reskalering hvor skallene blir omdefinert innenfor den nye tettere gass-skya. I dette arbeidet skal vi ikke undersøke dette nærmere. For å teste at dette virkelig er årsaken til problemet, så kjørte vi simuleringen på nytt med 200 skall istedenfor 100. Da kollapset gass-skyen som ventet til halvparten av radien som vi fant over.

Hvis vi ser bort fra disse tilnærmelsene så må vi undersøke andre tilnærmelser som vi har gjort: Spesielt lengden på tidssteget i Eulermetoden er det viktig å undersøke om er lite nok. Er tidssteget for stort så vil bevegelsene være veldig unøyaktige. Vi kjører derfor simuleringen på nytt med 1/10 så store tidssteg, og 10 ganger så mange tidssteg totalt. Resultatene var svœrt konsistente, noe som bekrefter at tidssteget vårt var lite nok.

V. KONKLUSJON

Vi har laget en meget forenklet kode for stjernedannelse. Metoden er unøyaktig fordi den bruker et veldig begrenset antall partikler, samt at vi ikke tar hensyn til gravitasjon i de sentrale delene der gassen til slutt ender opp. Det siste punktet kan rettes opp ved å beregne gravitasjonen på en annen måte som ikke deler opp i skall. Antall partikler til vœre veldig avhengig av regnekraft, men på en kraftigere datamaskin vil man kunne kjøre algoritmen med langt flere partikler og dermed få mer nøyaktig svar.

ACKNOWLEDGMENTS

Takk til M. Curie, G. Galilei, P. Dirac og N. Tesla for nyttige diskusjoner under arbeidet med denne artikkelen. Takker også E. Schrodinger og A. Arkimedes for te og kjeks til arbeidet.

[1] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1A i kurset AST2000