UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 15. desember 2010, 09.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 14 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 11 oppgaver: det gies 9 poeng på hver oppgave med unntak av den numeriske oppgaven hvor det gies totalt 10 poeng (dette betyr ikke at den numeriske oppgaven er spesielt stor eller vanskelig (det er den ikke), men at den tillegges litt mer vekt da numeriske oppgaver er en viktig del av kurset).

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

DON'T PANIC: Det er en del tekst, men det aller meste av teksten er hint for å hjelpe deg. Ikke tenk for vanskelig, oppgavene er korte, raske og med små regninger!

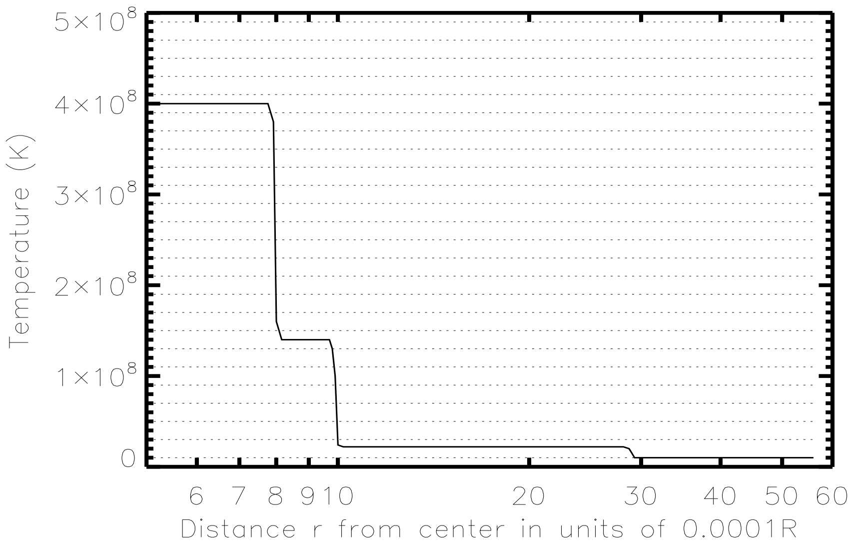
OPPGAVE 1:

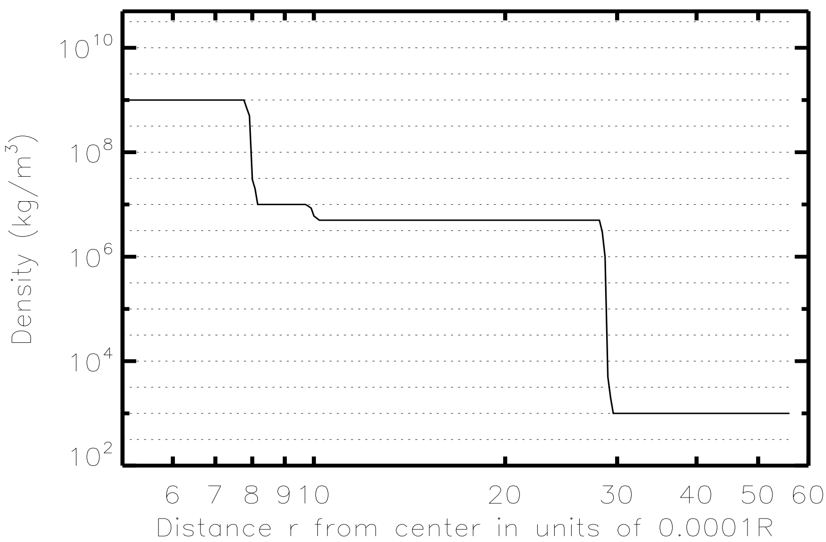
Anta at vi har kjørt en datamodell for en stjerne gjennom deler av dens livsløp. På et punkt i stjernas liv stopper vi koden og kikker på temperatur, tetthet og fordelingen av grunnstoffer i stjerna. I figur 1 viser vi temperatur og tetthet som funksjon av avstanden r fra sentrum i et intervall $r = [0.0005R, 0.006R]$ hvor R er radien til stjerna. Anta at stjerna har uniform temperatur og sammensetning fra og med 0.0005R og helt inn til sentrum. I figur 2 viser vi fordelingen av grunnstoffer i det samme avstandsintervallet. Kurvene viser masseforholdet (mass fraction) X_H, X_{He} og X_{CO} for henholdsvis hydrogen, helium og karbon+oksygen, dvs. hvor stor andel av massen på en gitt radius som består av det gitte grunnstoffet.

- **Oppgave:** I figur 3 ser du et HR-diagram hvor 6 stjerner har blitt markert spesielt med merkelapper A, B, C, D, E of F. Ved å se på figurene med data for stjerna vår, avgjør hvilken av disse 6 stjernene som er stjerna i datamodellen.
- **Merk:** Du må begrunne svaret ditt kort (3-4 setninger), det blir ikke gitt poeng for riktig svar uten begrunnelse.
- **Hint:** Her trenger du ingen regning.

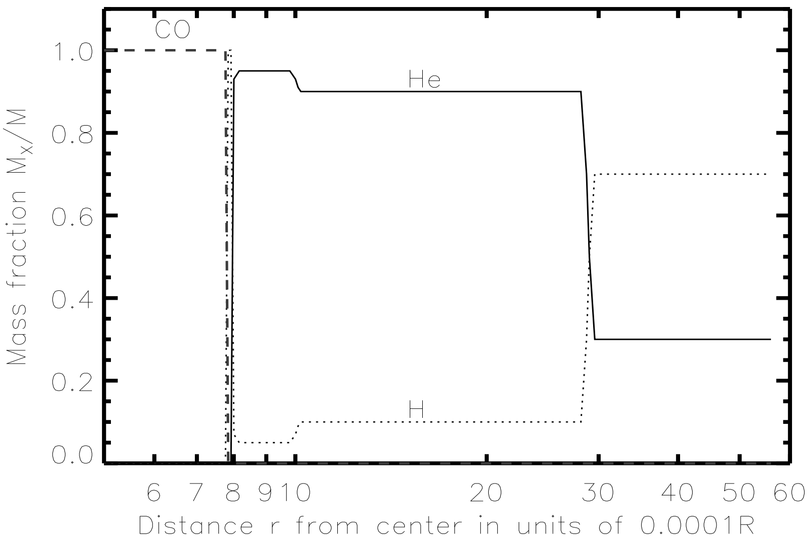
OPPGAVE 2:

- **Informasjon:** Vi ser fra figurene at stjerna er delt inn i 4 soner nær sentrum (kjernen pluss 3 skall rundt.). Innenfor hver av disse fire sonene ser vi at temperatur og sammensetninga av stjerna er den samme i hele sonen.
- **Oppgave:** I hvilke av disse 4 sonene har vi degenerert gass? (det kan være flere enn en). Angi svaret som intervaller i avstanden r fra sentrum.
- **Hint 1:** Du kan få bruk for formelsamlinga bak.
- **Hint 2:** Her trengs det litt rask regning.
- **Hint 3:** Anta at antalltettheten (number density) av elektroner og antalltettheten av protoner er den samme.
- **Hint 4:** Du kan finne et forhold mellom massetetthet og antalltetthet av protoner ved å gjøre en rimelig antakelse om antall nøytroner i forhold til protoner i gassen.

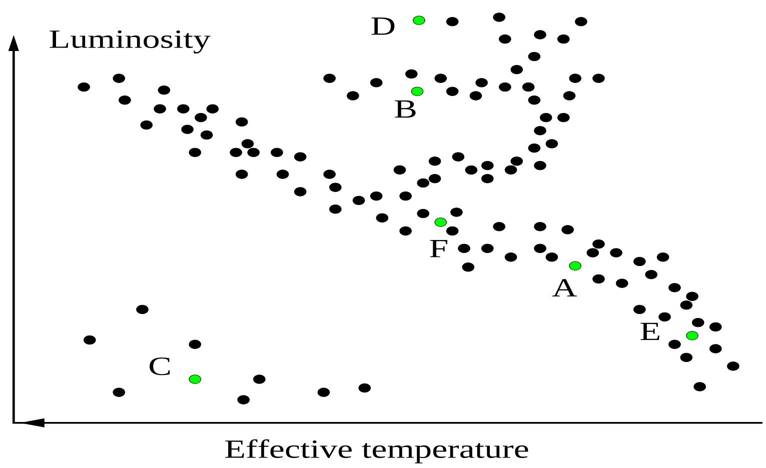




Figur 1: Temperatur og tetthet som funksjon av avstand r (angitt i enheter av 0.0001R hvor R er radien til stjerna, står det f.eks. 7 på x-aksen betyr det $r = 0.0007R$) fra sentrum i stjerna. Kun intervallet $r = [0.0005R, 0.006R]$ er angitt. Du kan anta at temperaturen og tettheten fortsetter å være konstant fra 0.0005R og helt til sentrum. Det er tegnet inn horisontale prikkede linjer for å hjelpe deg å lese av på y-aksene.



Figur 2: Masseforhold (mass fraction: andel av massen som består av et gitt grunnstoff) X_H (prikket linje) i hydrogen, X_{He} (heltrukken linje) i helium og X_{CO} (striplet linje) i karbon og oksygen som funksjon av avstand r (angitt i enheter av 0.0001R hvor R er radien til stjerna) fra sentrum i stjerna. Kun intervallet $r = [0.0005R, 0.006R]$ er angitt. Du kan anta at masseforholdene fortsetter å være konstant fra 0.0005R og helt til sentrum.



Figur 3: HR-diagram.

OPPGAVE 3:

- **Oppgave:** I nær fremtid kommer det til å komme et helium skall-flash (helium shell flash) i stjerna. Forklar i hvilken av de 4 sonene (igjen: angi intervall i r) dette skall-flashet kommer til å skje og hva et skall-flash er. Bruk ca 1/2 side maks med normal skriftstørrelse.
- **Hint:** Her bør du forklare (a) hva er det som utløser et skall-flash, (b) hva skjer i et skall-flash og (c) hva skjer som et resultat av flashet.

OPPGAVE 4:

- **Oppgave:** Beregn luminositeten til stjerna og angi svaret i solluminositeter $L_\odot$.
- **Viktig informasjon:** Radien til stjerna er 20 solradier, dvs. $R = 20R_\odot$. All energiproduksjon i stjerna foregår innenfor $r = 0.006R$.
- **Hint 1:** Du kan anta at det er helium-fusjon i et av skallene som dominerer totalt og du trenger kun å beregne luminositeten fra helium-fusjon i dette ene skallet. Men for å kunne bruke denne antakelsen må du forklare kort (1-2 setninger) kvalitativt (uten regning) hvorfor dette kan være en god antakelse.
- **Hint 2:** Du kan finne volumet av et skall ved å ta differansen av volumet av to kuler.
- **Hint 3:** Ikke bli overrasket hvis du finner en veldig stor luminositet, denne typen stjerner lyser veldig sterkt.
- **Merk:** Hvis du ikke får til denne oppgaven så bruk en luminositet på 10 solluminositeter (som er helt feil svar) i videre oppgaver.

OPPGAVE 5:

- **Antakelse:** Anta at stjerna ligger i en avstand av 3000 lysår fra oss.
- **Oppgave:** Beregn den tilsynelatende (apparent) magnituden til stjerna.
- **Hint:** Bruk sola som referanse.

OPPGAVE 6:

Stjerna kommer til slutt til å eksplodere som en supernova. Vi vil nå studere de siste sekundene av stjernas liv, rett før eksplosjonen. Kjernen av stjerna har etter en første kontraksjon nå fått en radius på 75km. Vi skal nå (i neste oppgave) bruke denne kjernen til å gjøre beregninger av den videre utviklingen av stjerna som fører til en supernovaeksplosjon.

- **Oppgave:** Begrunn (med tall) hvorfor vi nå må regne relativistisk.
- **Hint:** Du trenger å vite massen til kjernen: Anta at det som nå har trukket seg sammen til en kule på radius 75km er den delen av stjerna som tidligere (i plottene våre) strakk seg ut til ca. r=0.0008R.

OPPGAVE 7:

- **Antakelser:** Anta at sammentrekningen har stoppet midlertidig opp når kjernen har en radius på 75km. Nå starter sammentrekningen på nytt og vi antar at hele kjernen faller sammen til et sort hull. Anta at overflaten til kjernen er i fritt fall.
- **Oppgave:** Vis at hastigheten (målt fra en observatør i ro langt vekk fra sentrum av stjerna) til denne overflaten som funksjon av avstand r fra sentrum er gitt ved:

  $$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)\left(1 - \frac{2M_0}{r_0}\right)^{-1}}$$

  Her er M_0 massen til kjernen og $r_0 = 75km$.
- **To små tilleggsspørsmål:** Hva er hastigheten til denne overflaten i det den er i ferd med å passere eventhorisonten? Vil overflaten av kjerna noen gang passere eventhorisonten sett fra en langt-vekk-observatør? (hvorfor/hvorfor ikke)
- **Hint 1:** Se på et punkt på overflaten som et lite masseelement i fritt fall radielt inn mot sentrum.
- **Hint 2:** Schwarzschild linje-elementet sier noe om forflytningen dr per tid dt i tyngdefeltet. Det sier også noe om tidsintervallet målt på en klokke som sitter fast på den fallende overflaten.
- **Hint 3:** Det finnes en bevart størrelse som kan hjelpe deg å bli kvitt en uønsket variabel. Du trenger å vite verdien til denne bevarte størrelsen i startpunktet (når sammentrekningen starter), da kan det være lurt å uttrykke dette ved hjelp av skall-tid og dermed skall-hastigheten som du kjenner i utgangsposisjonen.

OPPGAVE 8:

- **Oppgave:** Hvilken hastighet v_{shell} vil en observatør som står i ro rett på utsiden av eventhorisonten observere at overflaten på kjernen har i det den passerer observatøren?
- **Hint:** Her må du transformere hastigheten i forrige oppgave over til et annet referansesystem.

OPPGAVE 9:

Vi skal nå lage et dataprogram som beregner tiden det tar for kjernen å kollapse fra radius 75km til eventhorisonten, målt for en observatør langt vekk fra tyngdefeltet. I prinsippet så kunne man løst dette ved å integrere opp likningen for dr/dt over, men siden dette blir en stygg integrasjon så skal vi beregne denne tiden numerisk.

- **Oppgave:** Skriv en pseudo-kode som beregner tiden som kollapsen tar for en langt-vekk-observatør. Vis hvordan du setter verdier på variable, definerer arrayer, hvor du har løkker og hvor du har if-statements.
- **Hint 1:** Du kan velge å se på dette som (a) en enkel numerisk integrasjon, eller (b) en steg-for-steg beregning av overflaten etter som den beveger seg nedover mot sentrum der du til slutt summerer opp den totale tiden over alle stegene. Koden vil i prinsippet bli omtrent den samme uansett hvilken av de to måtene du velger å se det på.
- **Hint 2:** I fasiten ble dette en kort liten kode på 9 linjer.

OPPGAVE 10:

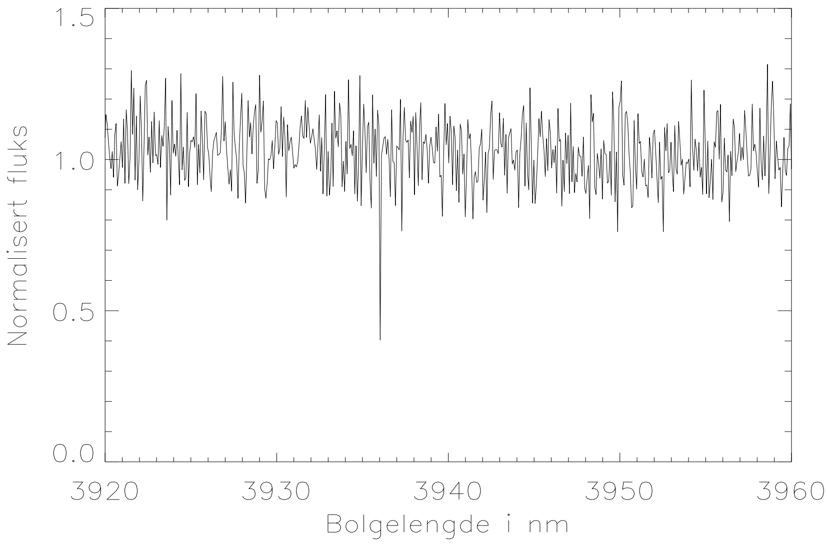
Vi skal i denne oppgaven anta at stjerna vår isteden for å befinne seg i en avstand av 3000 lysår nå isteden befinner seg veldig, veldig langt bort. I figur 4 ser du en del av spektret som vi observerer fra supernovaeksplosjonen. Linjen du ser er $H\alpha$-linja som i laboratoriet er målt til å være på $\lambda_0 = 656nm$.

- **Oppgave:** Hva var alderen til universet da denne supernovaen eksploderte?
- **Antagelse:** Vi antar at universet er dominert av støv og ikke av gass eller stråling, vi antar også at universet er flatt. Anta videre at alderen til universet i dag er 13.6 milliarder år.
- **Hint:** I formelsamlingene bak finner du uttrykk som relaterer universets ekspansjonsfaktor med alderen. Du finner også en relasjon som sier noe om rødforskyvningen til et objekt og universets ekspansjonsfaktor.

OPPGAVE 11:

Vi skal nå tilbake til det stadiet som stjerna var på i figur 1.

- **Oppgave:** Ved å se på figuren skal du svare på om stjerna på dette stadiet er i hydrostatisk likevekt eller ikke. Du skal begrunne svaret fysisk **uten** å bruke likningen for hydrostatisk likevekt.
- **Kort tillleggsspørsmål:** Gjelder svaret ditt også for det (de) degenererte skallet til stjerna? Hvorfor/hvorfor ikke?



Figur 4: Det observerte spekteret til supernovaen. Vi ser spektrallinjen for overgangen $H\alpha$.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_{\mathrm{p}} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_{\mathrm{n}} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{\mathrm{max}}T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_{\odot} = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

celestmekanikk/ekstrasolare planeter/virialteoremet:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$m = G(m_1 + m_2)$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/R)^2}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

stråling/magnituder/avstander:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$

$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$$

$$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$

$$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$$

$$M_V = -3.53\log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

$$v = H_0 d_p$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$$

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4$$

$$\rho_r = aT^4$$

generell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$$

$$\frac{M_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\mathrm{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$$

$$\Delta r_{\mathrm{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{(1 - \frac{2M}{r})}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

$$\Delta r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t$$

$$b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$$

$$b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}}-d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

$$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$$

$$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^{\beta}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^{\alpha} T^{\beta}$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

$$\varepsilon_{0,pp} = 1.08\times 10^{-12}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

$$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24\times 10^{-31}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$$

$$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86\times 10^{-18}\text{Wm}^6/\text{kg}^3$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$L \propto M^4$$

$$t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\text{eff}}^2$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} p\, v\, n(p)\, dp$$

$$n(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1}$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)} + 1}\frac{2}{h^3}$$

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

$$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$$

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$

kosmologi:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - R^2(t)\left[\frac{\Delta r^2}{1-kr^2} + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2\right]$$

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$z = \frac{R_0}{R(t)} - 1$$

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t) - \frac{\Lambda}{3}R(t)^2 = -k$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho(t) + 3P(t))R(t) + \frac{\Lambda}{3}R(t)$$

$$\rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho R^{3(1+w)}) = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{3(1+w)}$$

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \qquad \text{(for k = 0)}$$

$$q(t) = -\frac{1}{R(t)H^2(t)}\frac{d^2R(t)}{dt^2}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$d_L = r(1+z)R_0$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{(m_n - m_p)/kT}$$

$$\frac{n(t_1)}{n(t_2)} = e^{-\ln 2(t_1 - t_2)/\tau}$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2}[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]$$

$$v = H_0 d_p$$