UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 13. desember 2011, 14.30 – 18.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 13 sider

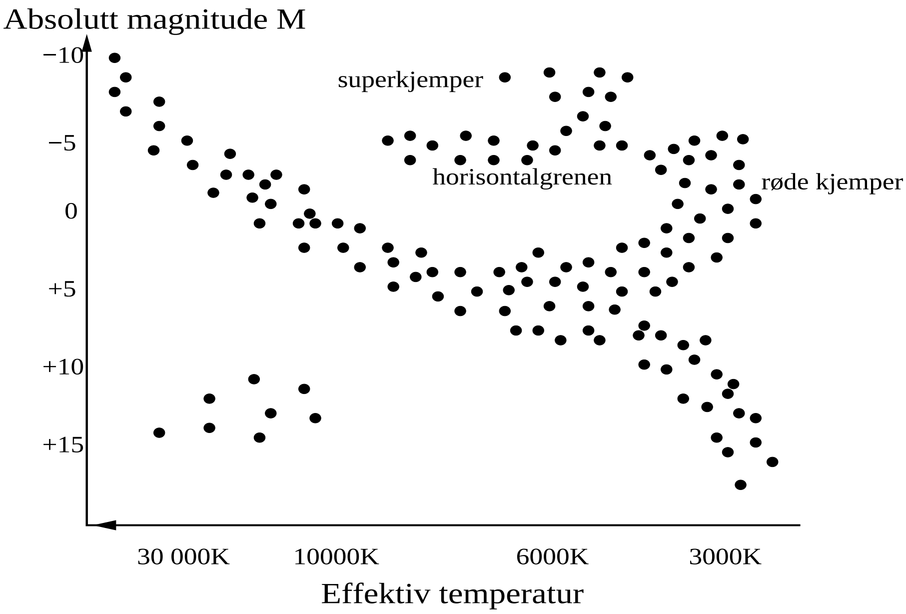
Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Oppgavene er nummerert fra 1 til 9, hvorav oppgave 8 er delt i 8a og 8b, dermed blir det totalt 10 oppgaver som alle teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.



Figur 1: Brukes i flere oppgaver

OPPGAVE 1:

- **Bakgrunnsinformasjon:**I mange av oppgavene på denne eksamen så vil du trenge et HR-diagram. I figur 1 finner du et HR-diagram som du kan bruke.

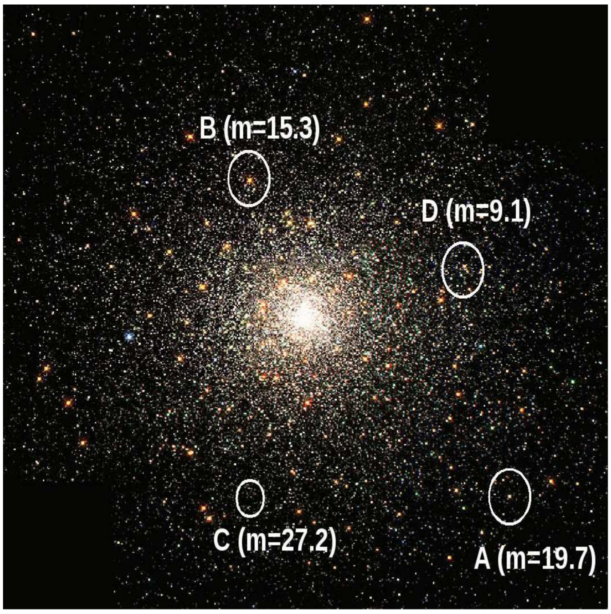
  I de følgende oppgaver skal vi se på stjernehopen i bildet på figur 2.

  I bildet så er noen stjerner markert med en bokstav og den tilsvarende tilsynelatende magnituden som de har. Vi skal nå etterhvert se på stjerne A, B, C og D.

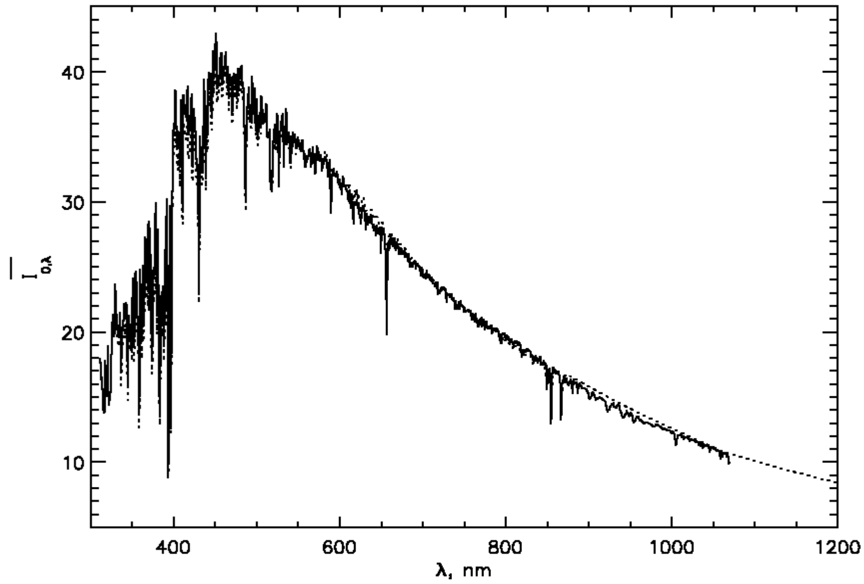
- **Oppgave:** I figur 3 ser du intensiteten til stjerne A, som er en hovedseriestjerne, som funksjon av bølgelengden. Tallene på y-aksen er intensitet i enheter av $10^{12} W m^{-3} sr^{-1}$. Finn overflatetemperaturen til stjerna og si hvilke antakelser du gjorde for å finne den.

OPPGAVE 2:

Kjernen til stjerne B består for det meste av helium og den er elektrondegenerert. Hydrogen fusjoneres til Helium i skall rundt. Bruk dette til å anslå omtrentlig overflatetemperaturen til stjerna (uten regning). Det er viktig at du forklarer godt (2-3 setninger) hvordan du kommer frem til svaret.



Figur 2: Brukes i flere oppgaver



Figur 3: Brukes i oppgave 1

OPPGAVE 3:

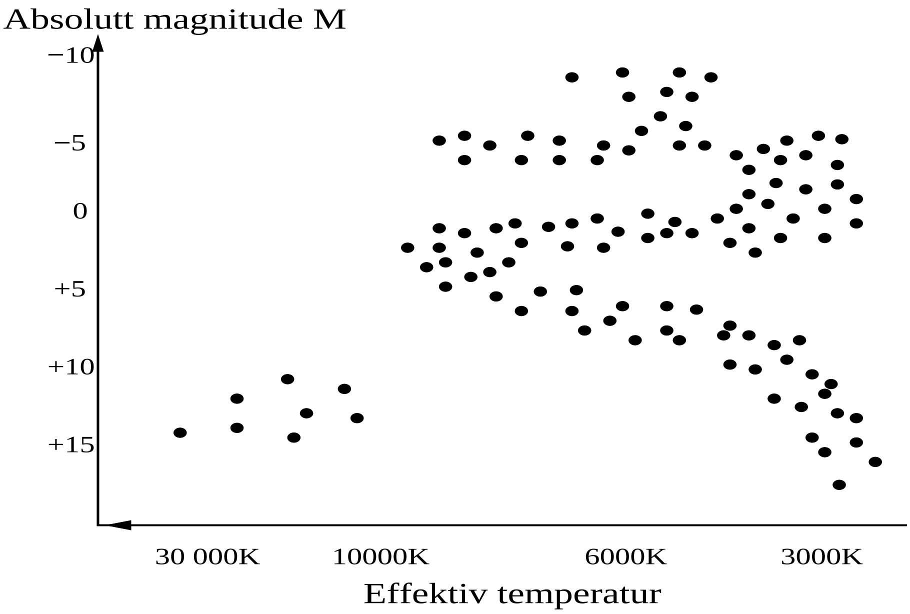
Spektret til stjerne C er dominert av sterke karbon- og oksygenlinjer, med meget svake (knapt synlige) hydrogen- og heliumlinjer. Bruk dette til å anslå overflatetemperaturen til stjerna. Her er det et ganske stort intervall av temperaturer som er akseptable, velg en temperatur omkring midt i intervallet. Det er viktig at du forklarer godt (2-3 setninger) hvordan du kommer frem til svaret.

OPPGAVE 4:

- **Oppgave:** Bruk informasjonen som ble gitt i de tre foregående oppgavene samt resultatene du fant til å finne avstanden til stjernehopa. Lag en figur/grov skisse som viser hvordan du går frem. Dette blir veldig unøyaktig og det blir nok forskjellige svar, så det er viktig at du forklarer godt hvordan du tenker.
- **Merk 1:** Hvis du ikke får til denne oppgaven skal du bruke en avstand på 3kpc videre (som ikke er riktig svar)
- **Merk 2:** Hvis du ikke klarte å løse en eller flere av de foregående oppgavene så skal du bruke følgende tre temperaturer (som ikke er helt riktig svar) for hver av stjernene A, B og C i denne oppgaven:10 000K, 4000K, 10 000K. Selv om det kun var en av de foregående oppgavene du ikke løste skal du bruke **alle** disse tre temperaturene (og ikke bruke de som du fant) i denne oppgaven.

OPPGAVE 5:

I stjerne D foregår hydrogenfusjon via CNO-syklusen i hele kjernen. Anta at kjernen er uniform med total massetetthet $\rho = 300 \times 10^3 kg/m^3$, massetetthet av hydrogen $\rho_H = 238 \times 10^3 kg/m^3$, massetetthet av helium $\rho_{He} = 59 \times 10^3 kg/m^3$ og temperatur 20 millioner Kelvin. Si hvilke antakelser du gjør og finn radiusen til kjernen. **HINT:** Her kan du finne et uttrykk for luminositeten. Ved å bruke kjente størrelser kan du dermed også finne et uttrykk for absolutt magnitude. Til slutt så kjenner du både tilsynelatende magnitude og avstand til stjerna (anta at avstand til hopen = avstand til stjerna).



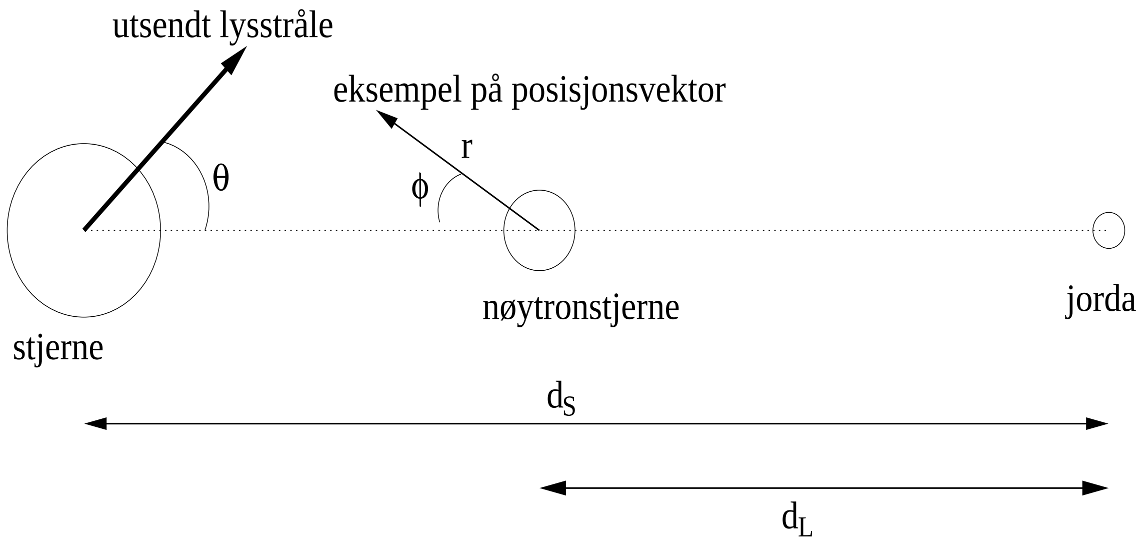
Figur 4: Brukes i oppgave 6

<u>OPPGAVE 6:</u>

I figur 4 ser du HR-diagrammet for denne stjernehopen. Hvor gammel er hopen? Husk at i en stjernehop så fødes alle stjernene omtrent samtidig fra den samme gass-skya. Det er viktig at du forklarer godt hvordan du kommer frem til svaret og hvilke antakelser du gjør (her trengs også litt regning).

OPPGAVE 7:

- **Bakgrunnsinformasjon:** En nøytronstjerne i hopen kommer i nærheten av en av stjernene som vi ser på bildet og forårsaker svak gravitasjonslinsing.
- **Lite oppvarmingsspørsmål:** Beskriv med 2-3 setninger hva svak gravitasjonslinsing er for noe og hvordan det observeres.
- **Oppgave:** Du skal nå skrive et dataprogram som beregner banen til lyset fra stjerna. Lyset sendes ut i vinkel θ (se figur 5). Bruk polarkoordinater med origo i nøytronstjerna og $\phi = 0$ i retning fra nøytronstjerna til stjerna som vist på figuren. Figuren viser et eksempel på en posisjonsvektor r. Fyll ut de tre manglende linjene i pseudokoden i figur 5 for å finne banen til lyset uttrykt ved $r(t)$ og $\phi(t)$. Du trenger kun å beregne banen frem til punktet nærmest nøytronstjerna. Du skal kun se på effekten av gravitasjon fra nøytronstjerna med masse M, ikke fra stjerna der lyset blir sendt ut.




```
;;lyset starter ved stjerna i t=0:
r(0)=dS-d_L
phi(0)=0  ;;phi=0 fra noytronstjerna til stjerna

;beregn impact factor:
1.

delta_t=short_time ;;tidssteg

for t=1,long_time
\ \ \ \ 2.r(t)=   ;;oppdater r her
\ \ \ \ 3.phi(t)=  ;;oppdater phi her
endfor
```

Figur 5: Figur og kode for oppgave 7

OPPGAVE 8:

- **Bakgrunnsinformasjon:** I figur 6 ser du en pseudo-kode for å simulere elektronene i sentrum av kjernen til en stjerne. I koden skal du generere posisjonene til elektronene i en 3-dimensjonal boks med sider L fra en uniform fordeling og hastighetene til partiklene fra Maxwell-Boltzmann-fordelingen $n(\vec{v})$. Massetettheten og temperaturen til kjernen i det vi starter simuleringa er ρ_0 og T. Du skal bruke Eulers metode for å bevege partiklen i gassen i hvert tidssteg. For å simulere at kjernereaksjonene har stoppet opp og at kjernen trekker seg sammen pga. gravitasjon så skal du nå krympe sidene på boksen med en fast lengde på ΔL per tidssteg Δt. Du skal la boksen krympe frem til du finner at gassen har blitt degenerert. Du skal nå fylle ut pseudokoden i figur 6.
- **Merk 1:** I det elektronene treffer sidene i boksen, går de rett gjennom og kommer inn igjen på motsatt side av boksen. På denne måten så er antall partikler i boksen konstant. Dette er en vanlig måte å simulere en boks inne i et større system på. Dette er ikke noe du trenger å tenke på, linjene for å gjøre dette er allerede i koden.
- **Merk 2:** Du trenger ikke å endre hastigheten til partiklene i hvert tidssteg, kun posisjonen. Akselrasjon av partiklene blir allerede gjort i et kall i koden og er ikke noe du trenger å tenkte på.
- **Hint:** Gaussfunksjonen med middelverdi 0 ser slik ut:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

- **Antakelse 1:** Anta at kjernen på dette tidspunktet kun består av frie elektroner og heliumkjerner. Det er **kun elektronene** du skal simulere siden det er disse som blir degenererte. Heliumkjernene er til stede, men du trenger ikke å simulere dem.
- **Antakelse 2:** Anta at massen til elektronene er neglisjerbar i forhold til heliumkjernene.
- **Antakelse 3:** Anta at kjernen er elektrisk nøytral

(a) I denne deloppgaven skal du skrive delene av koden merket KODE1, KODE2 og KODE3, det vil si: finne antall elektroner i gassen fra tettheten, trekke tilfeldige posisjoner og hastigheter og bruke Eulers metode til å oppdatere posisjonen i hvert tidssteg.

(b) I denne deloppgaven skal du skrive delene av koden merket KODE4 og KODE5, det vil si: krympe boksen og sjekke om gassen er degenerert.

Forklar kort hvordan du tenker. Merk: Hver av de 5 kodesnuttene er svært korte, fra en linje til omkring 4 linjer.

```
rho0=tetthet
T=temperatur
mHe=heliummasse
k=boltzmannkonstant
h=planckkonstant
me=elektronmasse
deltat=short_time
L=bokslengde
deltaL=fast_krympelengde

;;;her skal du finne antall partikler:
N=***KODE1***


x=array(3,N)  ;; x,y og z posisjonen (3 elementer) for alle N partikler
v=array(3,N)  ;; hastighets komponentene v_x, v_y og v_z for alle partikler
for i=1,N  ;; loop over partikler
     ;her skal du generere tilfeldig posisjon og hastighet:
     ***KODE2***
endfor

for t=1,long_time ;; loop over tid
    ;;her skal du oppdatere posisjon til partiklene:
    ***KODE3***

    ;;;dette trenger du ikke a tenke pa:
    call check_walls(x,L) ;;sjekker og korrigerer hvis partiklene treffer veggen
    call update_velocity(v) ;;her blir hastigheten oppdatert i hvert steg

    ;;her skal du krympe boksen:
    ***KODE4***

    ;;her skal du sjekke om gassen har blitt degenerert:
    ***KODE5***

endfor ;;loop over tidssteg
```

Figur 6: Kode for oppgave 8

OPPGAVE 9:

Til noe helt annet: I et eksperiment som ble gjennomført i 2010, så brukte man ekstremt presise klokker til å måle effekten av gravitasjonell tidsfortynning. Man satte to slike klokker ved jordoverflaten med en høydeforskjell på 33cm. Hvilken tidsforskjell ble observert mellom de to klokkene et døgn etter at de to klokkene ble synkronisert med hverandre? Se bort fra all bevegelse (fra jordrotasjonen) og regn kun med den gravitasjonelle effekten. For å regne med tall kan du få bruk for

$$\sqrt{\frac{1-x}{1-y}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,$$

når x og y er små.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

celestmekanikk/ekstrasolare planeter/virialteoremet:

$P^2 = a^3$

$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3$

$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$

$r = \frac{p}{1+e\cos f}$

$m = G(m_1 + m_2)$

$p = h^2/m$

$p = a(1-e^2)$ (ellipse)

$p = a(e^2-1)$ (hyperbel)

$p = 1/2a$ (parabel)

$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = M\vec{R}$

$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$

$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$

$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2}$

$< K >= -\frac{1}{2} < U >$

$U = -\frac{3GM^2}{5R}$

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$

$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$

$F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$

$n_{\mathrm{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$

$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$

$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$

$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$

$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$

$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$

$M_V = -3.53\log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B-V)$

$v = H_0 d_p$

$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$

$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$

$\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$

$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{rel}} & -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & \gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$< E_K >= \frac{3}{2}kT$

$N = \frac{M}{\mu m_H}$

$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$

$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$

$P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$

$\frac{M_{\rm m}}{M_{\rm kg}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\rm shell} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\Delta t$

$\Delta r_{\rm shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$

$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$\frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$

$\Delta r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t$

$b = \frac{L}{p}$

$V_{\rm eff} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$

$b_{\rm crit} = 3\sqrt{3}M$

$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$

$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\rm source}-d_{\rm lens})}{d_{\rm lens}d_{\rm source}}}$

kjernereaksjoner:

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_AZ_Be^2}{r}$

$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_An_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$

$r_{AB} \propto X_AX_B\rho^{\alpha'}T^{\beta}$

$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_AX_B\rho^{\alpha}T^{\beta}$

$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp}X_H^2\rho T_6^4$

$\varepsilon_{0,pp} = 1.08\times10^{-12}\mathrm{Wm^3/kg^2}$

$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO}X_HX_{CNO}\rho T_6^{20}$

$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24\times10^{-31}\mathrm{Wm^3/kg^2}$

$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2X_{He}^3T_8^{41}$

$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86\times10^{-18}\mathrm{Wm^6/kg^3}$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$L \propto M^4$

$t \propto 1/M^3$

$M \propto T_{\rm eff}^2$

$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\,v\,n(p)\,dp$

$n(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2}e^{-p^2/(2mkT)}$

$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$

$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$

$n_{\rm norm}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}4\pi v^2dv$

$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$

$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_ek}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$

$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$

$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n_e^{4/3}$

$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$

$R_{\rm WD} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_eG}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3}M^{-1/3}$

$M_{\rm Ch} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$