UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 17. desember 2012, 14.30 – 18.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er samlet på en side etter selve oppgavene

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 10 oppgaver, alle oppgavene teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

OPPGAVE 1: Anta at en fjern stjerne har blitt observert over et lengere tidsrom (flere tusen år) og radien til stjerna viser seg å være konstant med tiden. Forklar med ord (uten likninger, 2-3 setninger) hva dette forteller oss om de fysiske forholdene inne i stjerna.

OPPGAVE 2: I denne oppgaven skal du beregne luminositeten til denne stjerna som vi skal kalle stjerne X (angi svaret i Watt). I tillegg til noen størrelser bak, så får du følgende hjelp:

- Øverst i figur 1 ser du et bilde av stjerne X tatt fra jorda. Nederst i den samme figuren ser du et bilde av den samme stjerna tatt fra en romsonde som går i bane rundt Jupiter. De to bildene ble tatt samtidig og de ble tatt på et tidspunkt da linja fra jorda til Jupiter er omtrent vinkelrett på linja fra jorda til stjerna (og Jupiter til stjerna). Avstanden mellom jorda og Jupiter på dette tidspunktet er 4 AU. Anta at stjerne X er mye nærmere oss enn alle de andre stjernene som du ser på bildet.
- Stjerna er en av de aller sterkeste stjernene på himmelen.

Du må også bruke noen antakelser, spesifiser hvilke. Hvis du ikke får til denne oppgaven bruk 4×10^{26} Watt (som er veldig feil svar) der du trenger dette i andre oppgaver.

OPPGAVE 3: I figur 2 ser du mottatt fluks fra stjerna som funksjon av bølgelengde. Bruk dette til å finne radien til stjerna. Anta sort legeme. Hvis du ikke får til oppgaven bruk solradien (som er feil svar) i andre oppgaver hvor du trenger radien.

OPPGAVE 4: Anslå den totale massen til stjerna. Anta hovedseriestjerne. Hvis du ikke får til denne oppgaven skal du bruke 1 solmasse (som er feil svar) videre i oppgaven.

OPPGAVE 5: Anta at tettheten til stjerna er den samme overalt, og at stjerna består av ideel gass. Anta i denne oppgaven (i senere oppgaver skal du ikke bruke denne antakelsen) at stjerna består uteklukkende av hydrogen. Bruk informasjonen fra oppgave 1 til å vise at temperaturen i sentrum av stjerna kan tilnærmes som

$$T_C \approx \frac{m_H G M}{2kR}$$

der m_H er hydrogenmassen, M er massen til stjerna og R er radien. Beregn også tallverdien for temperaturen i sentrum av stjerna. **Hint:** Du bør begynne med å finne et uttrykk for $M(r)$, den totale massen innenfor radien r fra sentrum av stjerna. Hvis du ikke får til denne oppgaven kan du bruke $T = 17 \times 10^6$ K i neste oppgave.

OPPGAVE 6: Gjør beregninger for å anslå hvilken kjernereaksjon som er dominerende helt i sentrum av stjerna ved å bruke svaret fra foregående oppgave. Du kan anta at stjerna er forholdsvis nydannet og bruke dette til å gjøre tilnærmelser. Anta at i universet generelt så består gass-skyer normalt av omtrent 75% hydrogen og 24% helium og i middel omkring 1 % av de tyngre grunnstoffene. For å svare på oppgaven bør du beregne omtrentlig energiproduksjon fra to mulige kjernereaksjoner og sammenlikne hvilken som er størst.

OPPGAVE 7: Anta at det i en eksplosjon på overflaten av stjerna blir sendt ut en gassklump med masse 10^{24}kg med hastighet 300 km/s rett opp fra overflaten til stjerna. Vi skal nå regne relativistisk for å skje hva som skjer med gassklumpen. I relativitetsteorien pleier vi å regne både tider, lengder og masser i meter siden det gjør at vi dermed kan sette $G = 1$ og $c = 1$. Beregn massen til stjerna, samt hastigheten til gassklumpen ved å bruke disse enhetene.

OPPGAVE 8: Ta hensyn til relativitetsteorien både for gravitasjonsfelt og hastighet. Hvor langt ut fra overflaten av stjerna kommer denne gassklumpen før den faller ned igjen? Angi svaret i kilometer.

OPPGAVE 9: Etter en stund vil stjerna forlate hovedserien ('main sequence'). Forklar stjernas overgang fra hovedserie til å bli 'sub giant', ta med: hva som er årsaken til at stjerna forlater hovedserien, hvordan stjerna endrer seg (temperatur, luminositet, forhold i kjernen) og hvilke fysiske prosesser som er årsaken til at stjerna endrer seg på denne måten. Bruk maksimalt omkring en halv til en side (avhengig av skriftstørrelse)

Oppgave 10 kommer på neste side.....

OPPGAVE 10: Vi skal nå studere den såkalte stjernevinden som er partikler som kontinuerlig lekker ut fra overflaten til stjerna og fører til massetap. Vi skal bruke en svært forenklet modell. Skriv et dataprogram (pseudo-kode) som simulerer gass i en boks med sidelengder `L` som er plassert helt på overflaten av stjerna. Anta at tettheten av gassen er gitt ved variabelen `rho`, temperaturen er gitt ved variabelen `T`. Anta også ideel gass, at gassen er ren hydrogengass og at det er vakum rett på utsiden av overflaten til stjerna. Den ene siden av boksen representerer overflaten slik at hele boksen er inne i stjerna mens det er vakum rett på utsiden av den siden av boksen som representerer overflaten. Skriv koden slik at den beregner det totale tapet av masse (i kg) per sekund fra stjerna, anta at massetapet er det samme over hele overflaten til stjerna. Du kan strukturere koden slik:

(a) Beregn antall partikler i boksen.

(b) Generer posisjonen til partiklene i boksen med en uniform sannsynlighetsfordeling.

(c) Generer gasspartiklene i boksen med tilfeldige hastigheter trukket fra en Gaussisk sannsynlighetsfordeling:

$$P(\vec{v}) = P(v_x)P(v_y)P(v_z)$$

der

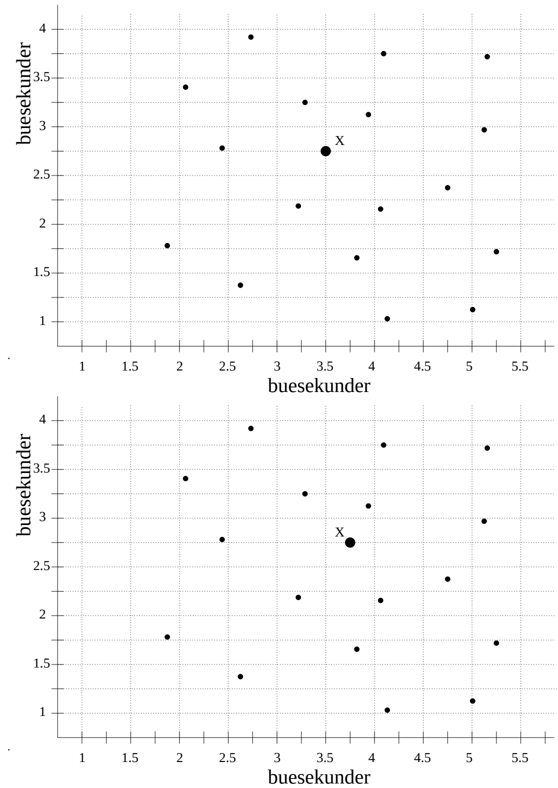
$$P(v_x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-(v_x^2)/(2\sigma^2)}$$

der $v_x = [-\infty, \infty]$ og tilsvarende for v_y og v_z. $P(v_x)$ er sannsynligheten for at partikkelen har en hastighet v_x og tilsvarende for $P(v_y)$ og $P(v_z)$. Her må du bruke Maxwell-Boltzmann fordelingsfunksjonen bak.

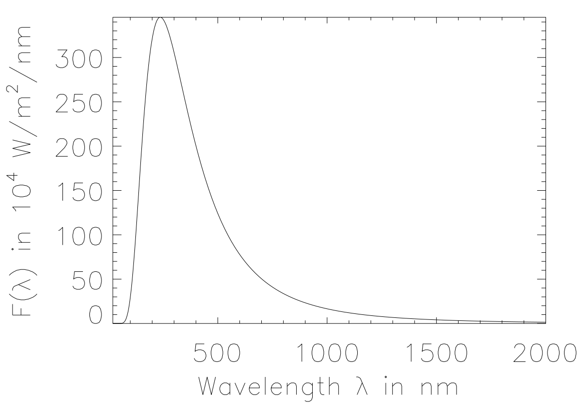
(d) Bruk så hvordan disse partiklene vil bevege seg i løpet av et kort tidsrom `deltat` til å finne massetapet fra boksen per tid.

(e) Bruk så massetapet fra boksen til å beregne massetapet fra stjerna per tid.

Anta at det allerede er definert en funksjon `Uniform(x)` som trekker tilfeldige tall mellom 0 og x fra en uniform fordeling og en funksjon `Norm(x,sigma)` som trekker et tilfeldig tall fra en Gaussisk fordeling med middelverdi x og standard avvik σ. **Merk:** Når du bruker disse to funksjonene, så må du spesifisere hva verdiene for `x` og `sigma` er eller hvordan du beregner dem.



Figur 1: For oppgave 2



Figur 2: For oppgave 3

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) $= 1.60 \times 10^{-19}$ J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU $= 1.5 \times 10^{11}$ m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly $= 9.47 \times 10^{15}$ m
parsec: 1 pc $= 206\,265$ AU $= 3.27$ ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

celestmekanikk/ekstrasolare planeter/virialteoremet:

$P^2 = a^3$ | $P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3$ | $\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$

$r = \frac{p}{1+e\cos f}$ | $m = G(m_1 + m_2)$ | $p = h^2/m$

$p = a(1-e^2)$ (ellipse) | $p = a(e^2-1)$ (hyperbel) | $p = 1/2a$ (parabel)

$\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i = M\vec{R}$ | $m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$ | $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$ | $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2}$ | $\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle U\rangle$

$U = -\frac{3GM^2}{5R}$

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$ | $I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$ | $F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$ | $B = dp$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$ | $\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$ | $m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$

$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$ | $B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$

$M_V = -2.81\log_{10}P_d - 1.43$ | $M_V = -3.53\log_{10}P_d - 2.13 + 2.13(B-V)$

$v = H_0 d_p$ | $\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$

$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$ | $\lambda_{\max}T = 0.0029$ m K

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ | $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$ | $V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$\langle E_K\rangle = \frac{3}{2}kT$ | $N = \frac{M}{\mu m_H}$ | $M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$ | $P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$ | $P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2 \Delta\phi^2$

$\frac{M_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{kg}}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\mathrm{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$

$\Delta r_{\mathrm{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$

$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$

$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$

$b = \frac{L}{p}$

$V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$

$b_{\mathrm{crit}} = 3\sqrt{3}M$

$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$

$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\mathrm{source}} - d_{\mathrm{lens}})}{d_{\mathrm{lens}}d_{\mathrm{source}}}}$

kjernereaksjoner:

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$

$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$

$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^\beta$

$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$

$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$

$\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$

$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$

$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$

$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$

$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\mathrm{Wm}^6/\mathrm{kg}^3$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$L \propto M^4$

$t \propto 1/M^3$

$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$

$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$

$n_{\mathrm{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$

$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$

$n_{\mathrm{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$

$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$

$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12 m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$

$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$

$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$

$\langle E_K \rangle = \frac{3}{5}E_F$

$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20 m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$

$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4 M_\odot$