UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 16. desember 2015, 14.30 – 18.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.
Det er totalt 11 oppgaver.

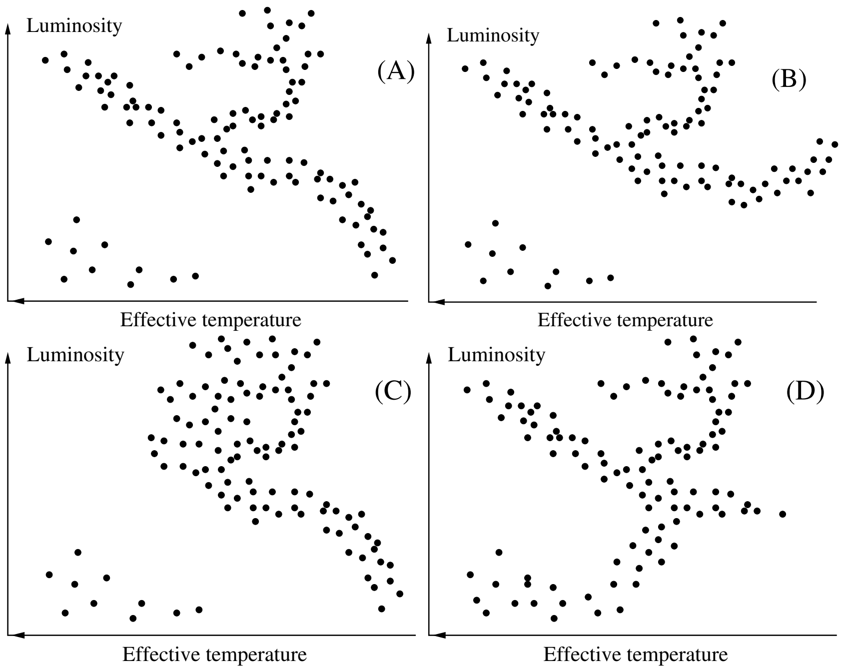
Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

NB! De som har fulgt alternativ oblig, bør aller først ta en kikk på oppgave 11. Du kan velge om du vil gjøre oppgave 11 isteden for 3 andre oppgaver som forklart i detalj i oppgave 11. De som har fulgt vanlig løp med ukentlige obliger skal besvare oppgave 1-10.

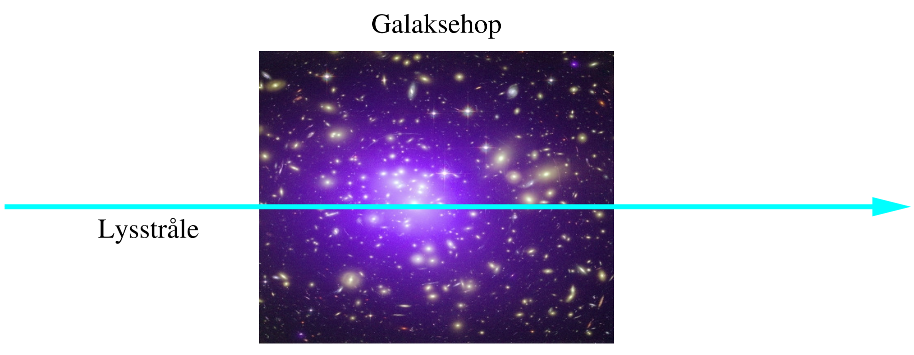
Vi skal i dette eksamenssettet se på en galaksehop. Totalmassen (inkludert mørk materie) til hopen er $\boldsymbol{M = 10^{15}}$ **solmasser**. Vi skal anta at hopen er helt **kuleformet** med en radius på $\boldsymbol{R = 3}$**Mpc** og at **massetettheten er den samme** i hele hopen (dette stemmer selvfølgelig ikke for galaksene, men det er en noe bedre antakelse for den mørke materien som jo dominerer massetettheten).

1. En galaksehop inneholder typisk en blanding av spiralgalakser og elliptiske galakser. **Viktig informasjon:** Spiralgalaksene har aktiv stjernedannelse mens i elliptiske galasker så har stjernedannelsen allerede stoppet opp for lenge siden.

   I figur 1 ser du 4 HR-diagram. **Angi hvilket av disse diagrammene (A, B, C eller D) som tilsvarer en spiralgalakse og hvilket tilsvarer en elliptisk galakse.** Gi en kort begrunnelse (1-2 setninger).



Figur 1: HR-diagram til oppgave 1



Figur 2: Lysstråle som går gjennom galaksehop. Til oppgave 2 - 5

2. Vi skal i løpet av denne og de 3 neste oppgavene se på tiden det tar for lys å passere gjennom sentrum av galaksehopen. I figur 2 ser vi lysstrålen og hopen. **Hvis vi antar at tettheten er den samme overalt i hopen, finn et uttrykk for totalmassen $M(r)$ innenfor en avstand r fra sentrum av hopen uttrykt kun ved totalmassen M av hele hopen, totalradien R, og r.**

3. **Bruk bevegelseslikningen for lys i Schwarzschildgeometri til å sette opp et integral som kan brukes til å beregne den totale tiden det tar for lysstrålen å gå fra kanten av hopen ved $r = R$ og radielt inn til sentrum av hopen.** Husk at et symmetrisk skall ikke bidrar til gravitasjon innenfor skallet, dette gjelder også i generell relativitetsteori. MERK: du skal ikke regne ut integralet enda. **Husk å ha med grensene på integralet.** Integranden kan kun inneholde totalmasse M og radius R av hopen i tillegg til variabelen som du integrerer over (du kan få bruk for noe fra forrige oppgave).

4. **Beregn størrelsen M/R for hopen**, svaret skal være et dimensjonsløst tall.

5. Bruk informasjonen fra forrige oppgave til å gjøre en tilnærmelse slik at integralet blir meget enkelt å regne. **Regn ut integralet og vis at tidsforsinkelsen (forårsaket av gravitasjonsfeltet) som lyset får ved å gå gjennom hele hopen er gitt ved $\Delta t = 4M/3$.** (Merk at når svaret i en oppgave er oppgitt så stiller det strengere krav til forklaring/mellomregning).

   Nærmere definisjon av Δt: Anta at den totale tiden det tar for lyset å gå fra den ene enden av hopen til den andre (altså en total avstand $2R$) er T og at tiden som lyset hadde brukt på den samme avstanden hvis det ikke var noe gravitasjonsfelt til stede (altså med Lorentz-geometri) er T_0. Da er $\Delta t = T - T_0$. Det er denne størrelsen du skal vise er lik $4M/3$.

6. En galaksehop inneholder i tillegg til galaksene også en varm ionisert gass med frie protoner og elektroner som fyller hele hopen. Temperaturen til denne elektron-protongassen er $T = 10^8$K. Vi antar ideel (ikke-degenerert) gass. **Bruk et uttrykk fra formelsamlingen bak til å utlede at den (absoluttverdien av) hastigheten som** *de fleste partiklene* **(altså** *ikke* **middelverdien) i en gass ved temperatur T har er gitt ved**

   $$v = \frac{2kT}{m}$$

   og bruk dette til å finne typisk hastighet for elektronene i gassen. Gi svaret i m/s. (Merk at når svaret i en oppgave er oppgitt så stiller det strengere krav til forklaring/mellomregning).

7. Fra nå av skal du se kun på elektron-protongassen: **du skal se bort ifra galaksene og den mørke materien i resten av eksamenssettet.**

   Anta at totalmassen til gassen er omkring 1/10 av totalmassen til hele hopen og at det er like mange elektroner som protoner i gassen.

   Bruk virialteoremet til å bestemme om gassen i denne hopen (hvis galaksene og den mørke materien ikke hadde vært der) **ville (A) fortsette å holde seg i hopen eller til og med kanskje klumpe seg mot sentrum, eller (B) gå i oppløsning og etterhvert forsvinne fra hopen.** MERK: du trenger bare å sette tall rett inn i 2 uttrykk gitt i formelsamlingen.

8. I hvilken grad vil det kunne skje fusjonsreaksjoner i denne varme protongassen via proton-proton-kjeden? (beregn effekten til hele gassen for å argumentere, angi også hvilken antakelse du må gjøre for å kunne bruke uttrykket bak)

9. I denne og neste oppgave skal du lage en kode for å simulere elektron-protongassen. Anta at du allerede har fått generert to arrays `pos(N,3,2)` og `vel(N,3,2)`. Første indeks er partikkelnummer mellom 1 og N, andre indeks angir om det er x, y eller z komponentene av posisjon og hastighet og den siste indeksen er 0 for elektroner og 1 for protoner. Du kan altså anta at disse arrayene allerede har startverdier for $t = 0$.

   Galaksehoper er kjent som kraftige røntgenstrålingskilder på grunn av Bremsstrahlung fra den varme elektrongassen. Du skal nå lage en kode for å beregne Bremsstrahlung-luminositeten til galaksehopa vår.

   Du skal først lage en løkke som simulerer den videre bevegelsen til alle elektronene og protonene i gassen fra tidspunkt $t = 0$ til et senere tidspunkt $t = T$ med tidssteg `deltat`. Se bort i fra alle krefter slik at partiklene ikke akselereres, med et unntak: Av og til bremses elektronene og vi får produsert Bremsstrahlung (det er kun bremsing av elektronene som gir et betydelig bidrag til strålingen, bremsing av protoner ser vi bort ifra)

   Hver gang et elektron er innenfor en avstand `deltal` ifra **minst en annen partikkel** (det kan være et elektron eller et proton), så genereres det et Bremsstrahlungsfoton. Anta at når dette skjer så reduseres hastigheten til dette elektronet med 50% mens retningen forblir uendret (selvfølgelig en kraftig forenkling). Hele energien som elektronet mister går over i fotonet. **Lag koden slik at den beregner den midlere Bremsstrahlungs-luminositeten til hele elektrongassen for perioden fra $t = 0$ til $t = T$.**

10. Du skal nå utvide koden til å beregne den nye temperaturen til elektrongassen etter at tiden T har gått (altså etter at løkken i forrige oppgave er overstått).

11. **Denne oppgaven er kun for de som har fulgt alternativ oblig: Hvis du velger å gjøre denne oppgaven så vil følgende 3 oppgaver ikke telle med (selv om du skulle ha gjort dem): oppgave 9 og 10 samt at en av oppgavene fra oppgave 1 - 8 (den av oppgavene der du får dårligst poengsum). Selv om du velger å besvare oppgaven 11 bare delvis, så vil disse 3 andre oppgavene likevel ikke telle med.**

    (a) Hvordan gikk du frem for å beregne temperaturen på overflaten av planetene dine? Hvilke antakelser gjorde du?

    (b) Hvordan gikk du frem for å finne hastigheten til satelitten din når den var på vei? Forklar det på en slik måte at en medstudent som ikke har tatt alternativ oblig ville kunne forstå. Ta med litt detaljer i fremgangsmåten, tegn figurer/grafer og forklar matematiske og numeriske metoder du bruker. (det kan være at du trenger en formel her som du kanskje ikke husker i detalj hvordan ser ut, det er ikke viktig, du skal i hovedsak forklare prinsippet og ideen her, om du ikke husker formelen helt er det iorden)

    (c) Gitt at tettheten ved overflaten til planeten din er ρ_0 og at friksjonskrafta (drag force) i atmosfæren er gitt ved

    $$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D A v^2$$

    der ρ er tetthet, C_D er en konstant, A er areal og v er hastighet. Finn først et uttrykk for terminalhastigheten ved overflaten til planeten og finn så arealet av fallskjermen som du trenger for å bremse til en vertikal terminalhastighet på mindre enn 3 m/s ved overflaten for $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$ og $C_D = 1$. Anta at massen til planeten din har samme masse og utstrekning som jorda.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

celestmekanikk/ekstrasolare planeter/virialteoremet:

$$P^2 = a^3 \qquad P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 \qquad \ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$
$$r = \frac{p}{1+e\cos f} \qquad m = G(m_1+m_2) \qquad p = h^2/m$$
$$p = a(1-e^2) \quad \text{(ellipse)} \qquad p = a(e^2-1) \quad \text{(hyperbel)} \qquad p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = M\vec{R} \qquad m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}} \qquad v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$
$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2} \qquad \rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2} \qquad \langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle U\rangle$$
$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

stråling/magnituder/avstander:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \qquad I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$
$$L = \frac{dE}{dt} \qquad F = \frac{dE}{dAdt}$$
$$F = \sigma T^4 \qquad B = dp$$
$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv \qquad \Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$
$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \qquad m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$
$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B \qquad B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$
$$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43 \qquad M_V = -3.53\log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B-V)$$
$$v = H_0 d_p \qquad \tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$$
$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda) \qquad \lambda_{\max} T = 0.0029 \text{ m K}$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right) \qquad V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$$\langle E_K\rangle = \frac{3}{2}kT \qquad N = \frac{M}{\mu m_H} \qquad M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$
$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr} \qquad P = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \qquad P_r = \frac{1}{3}aT^4$$
$$\rho_r = aT^4$$

generell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$$

$$\frac{M_{\text{m}}}{M_{\text{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\text{shell}} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\Delta t$$

$$\Delta r_{\text{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

$$\Delta r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{(L/m)^2}{2M}\left(1-\sqrt{1-\frac{12M^2}{(L/m)^2}}\right)$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} - 1$$

$$b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$$

$$b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}}-d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

$$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$$

$$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^{\beta}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^{\alpha} T^{\beta}$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

$$\varepsilon_{0,pp} = 1.08\times 10^{-12}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

$$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24\times 10^{-31}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$$

$$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86\times 10^{-18}\text{Wm}^6/\text{kg}^3$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$L \propto M^4$$

$$t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\text{eff}}^2$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$$

$$n_{\text{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$$

$$n_{\text{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)}$$

$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

$$\langle E_K\rangle = \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\text{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$$

$$M_{\text{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$