UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 13. desember 2016, 9.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 7 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak. Dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt. Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 10 deloppgaver som alle teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

OPPGAVE 1:

Fremtidens vitenskapsmenn skal studere et sort hull. De sender to raketter, romskip 1 og romskip 2 i samme retning etter hverandre mot det sorte hullet.

- De to rakettene ble sendt ut fra jorda med 30 dagers mellomrom (målt på klokker på jorda). Begge romskipene beveger seg langs den samme linja mellom jorda og det sorte hullet.
- Vi kaller disse to utskytingene for event A og event B.
- I event A blir klokkene på jorda og i romskip 1 satt til 0.
- I event B (skjer etter event A) blir klokkene i romskip 2 satt til 0.
- Romskip 1 har en fart v_1 på 99% av lyshastigheten i forhold til jorda.
- Romskip 2 har en fart v_2 på 99.8% av lyshastigheten i forhold til jorda.
- 10 dager etter oppskyting av romskip 2 (målt på klokka i romskip 2), så fikk **romskip 1** motorproblemer. Vi kaller dette for event C som altså skjer i romskip 1.
- Målet vårt er å finne et uttrykk for avstanden til event C målt fra romskip 2 uttrykt med tidspunktet t_C (tiden for event C målt på klokkene på jorda).

(a) **Sett inn tidspunkter og posisjoner til alle eventene A, B og C i de 3 forskjellige systemene (jorda: umerket, romskip 1: merket, romskip 2: dobbeltmerket).** Sett inn tall for koordinatene som er kjent og marker de som er ukjent. Merk at for koordinatene x_C og x'_B kan du bruke relasjoner av typen $x = vt$ for å uttrykke disse ved hjelp av andre kjente eller ukjente størrelser. Begge romskipene er i origo i sine respektive systemer og alle x-aksene har positiv retning i reiseretningen. **Du kan ikke bruke likningene for tidsfortynning eller lengdekontraksjon**. Du vil finne at totalt 8 koordinater har ukjent tallverdi.

(b) Du trenger nå tidspunkter og posisjoner fra foregående oppgave. Hvis det er noen av disse du ikke fikk til så kan du finne på tall eller størrelser for disse og bruke det i denne oppgaven.

Du skal nå bruke invarians av tidromsintervallet til å sette opp et uttrykk for avstanden mellom de to romskipene i det event C skjer (i ref. systemet til romskip 2) som en funksjon av t_C som eneste ukjente. Du trenger kun ett tidromsintervall mellom to av eventene (satt opp i to systemer) for å finne uttrykket.

Merk at du kun skal regne ut denne avstanden som en funksjon av t_C (som er ukjent), du trenger ikke finne noen tallverdi for avstanden eller for t_C

OPPGAVE 2:

Når romskip 2 er i en avstand $r = 237$ km (målt med langt-vekk-observatørens koordinater) fra det sorte hullet så har romskipet en hastighet på 10^5 km/s tangensielt på retningen mot det sorte hullet og en radiell hastighetskomponent på 5×10^4 km/s bort fra det sorte hullet. De oppgitte hastighetene er hastigheter målt av en skallobservatør som er rett ved romskipet. **Du skal anta at det sorte hullet har en masse på 4 solmasser.**

(a) Beregn total energi per masse E/m for romskipet. Angi svaret i Joule per kg. (**hint:** For å kunne regne ut energien trenger du gjøre en transformasjons fra et tidsintervall på langt-vekk-observatørens klokke til et tidsintervall på skallobservatørens klokke)

(b) Hvis astronautene i dette øyeblikket skulle fått motorproblemer, vil de (1) bli fanget av det sorte hullet, (2) gå i bane rundt det eller (3) unnslippe? (Du får bruk for flere uttrykk fra formelsamlingen her, **hint:** potensialet)

OPPGAVE 3:

Du er i lab-systemet i posisjon $x = 0$ og ser to biler som kjører fra posisjon $x = 0$ ved $t = 0$ (event 1) og kommer frem samtidig i posisjon $x = L$ ved en tid $t = T_L$ senere (event 2). Koordinatene x og t her refererer til målinger i lab-systemet. Bil A kjører med konstant hastighet $v_A = c/2$ mens bil B akselererer fra $v = 0$ ved $x = 0$ slik at den kommer til posisjon $x = L$ samtidig som bil A. I det følgende skal du tegne noen tidrom-diagrammer. Vi er ikke interessert i nøyaktige tall i denne oppgaven men omtrentlig riktige relative avstander og helninger på verdenslinjene (world lines) for å se at du har forstått grunnleggende prinsipper. **Forklar gjerne med ord i tillegg hvis tegningene blir utydelige.**

(a) Du skal nå tegne 3 tidrom-diagram. I alle diagrammene skal du tegne 3 verdenslinjer, en for deg selv, en for bil A og en for bil B. Det første diagrammet er sett fra laboratoriesystemet, de andre er sett fra referansesystemene til bil A og bil B. **Du trenger ikke å tegne inn L og T_L på aksene siden disse vil være forskjellige i de forskjellige systemene.**

(b) Sjåførene i de to bilene har helt like klokker som tikker regelmessig. Sjåfør A har nøyaktig 10 tikk på klokka fra event 1 til event 2. Det første og siste tikket var nøyaktig på event 1 og 2. **Tegn inn tikkene på klokkene til hver av sjåførene på hver sine verdenslinjene i det første tidrom-diagrammet (sett fra labsystemet) som prikker.** Nøyaktig posisjon til prikkene er ikke viktig, men den relative avstanden mellom prikkene bør være kvalitativ riktig.

Det er også viktig at du forklarer med noen setninger hvordan du tenkter når du tegner inn prikkene. **Minst halvparten av poengene på denne deloppgaven blir gitt på forklaringen. Det kan være vanskelig å tegne nøyaktig: hvis tegningen ikke er helt riktig men forklaringen er god så legger vi vekt på forklaringen. Hint 1:** Bruk maksimal aldring til å avgjøre om det er flere eller færre enn 10 prikker på linja til bil B, du kan selv velge hvor mange flere/færre du tegner. **Hint 2:** Se på helningen til verdenslinja når du tegner prikkene.

OPPGAVE 4:

I denne oppgaven skal vi anslå hvor mye radien til kjernen i en stjerne må krympe etter at hydrogenfunsjon har opphørt for at heliumfusjon skal sette igang. Vi antar at kjernen består av 100% helium. Vi antar at stjernen er for varm til at den blir degenerert mens den krymper.

(a) Du skal vise at trykket P_C på overflaten av kjernen til stjerna går omtrent som

$$P_C \propto \frac{M_C^2}{R_C^4}$$

hvor M_C og R_C er massen og radien til kjernen. Du skal bruke likningen for hydrostatisk likevekt på overflaten til kjernen og anta

- at trykket går som $P_C(r) \propto r^{-n}$ som funksjon av r (avstand fra sentrum), her er n et hvilket som helst positivt tall.
- Anta at tettheten i kjernen er uniform

Nesten alle poengene på denne oppgaven kommer fra forklaringene av mellomregningene. Det vil gi minimalt med poeng hvis du kun skriver likninger uten forklaringer som viser at du forstår.

(b) Bruk svaret fra forrige oppgave samt anta at vi har ideel gass til å vise at kjernetemperaturen T_C kan tilnærmes som

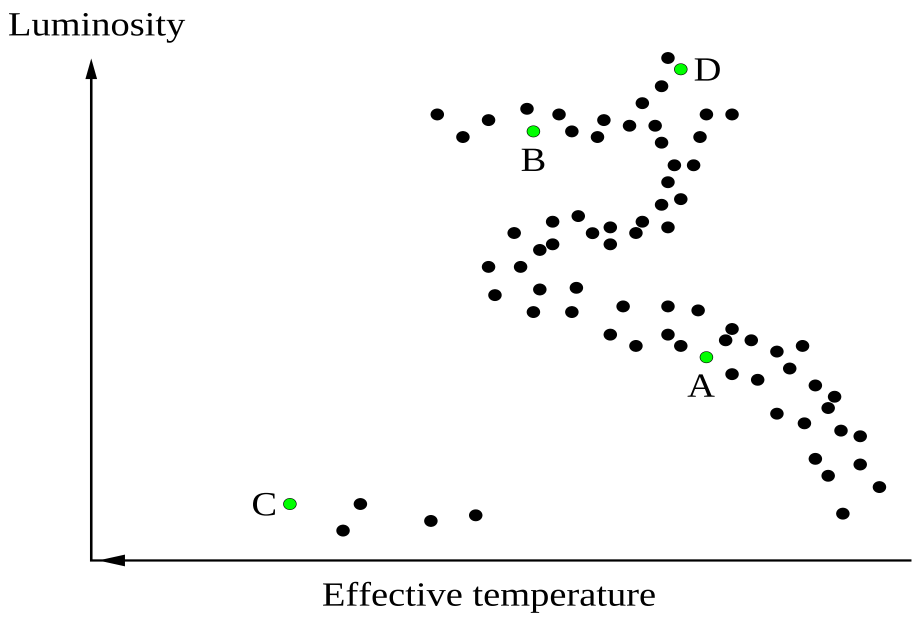
$$T_C \propto \frac{M_C}{R_C}$$

(antar at temperaturen er den samme i hele kjernen). Igjen så er det forklaringene som det blir gitt poeng på.

(c) Du skal nå finne hvilken radius R_C som kjernen til stjerna må krympe til for at heliumfusjon setter igang. Vi definerer igangsetting av heliumfusjon når luminositeten har nådd samme luminositet som solas luminositet. Før sammentrekningen startet så var tettheten til kjernen $\rho = 1.7 \times 10^5 \text{kg/m}^3$ og radiusen lik $R_C = 0.2R_\odot$. For å bruke et av uttrykkene over så trenger du å vite at solas kjerne har en masse $M_{\odot,C} = 0.34M_\odot$, en radius $R_{\odot,C} = 0.2R_\odot$ og temperatur $T_{\odot,C} = 15 \times 10^6 K$

OPPGAVE 5:

I HR-diagrammet for en åpen hop i figur 1 er det tegnet inn 4 stjerner A, B, C og D. Forklar hva som er hovedenergikilden til hver av disse stjernene? Hvis det er fusjon, forklar hvilket grunnstoff er det hovedsakelig som fusjonerer og om dette skjer i kjernen eller i skall rundt kjernen.



Figur 1: For oppgave 2. HR-diagram.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max}T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \qquad I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$$
$$L = \frac{dE}{dt} \qquad F = \frac{dE}{dAdt}$$
$$F = \sigma T^4 \qquad v = H_0 d_p$$
$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \qquad m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$
$$M_V = -2.81\log_{10}P_d - 1.43 \qquad \lambda_{\max}T = 0.0029\ m\ K$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right) \qquad V_\mu = \gamma(1,\vec{v})$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\rm rel} & -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & \gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT \qquad N = \frac{M}{\mu m_H} \qquad M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$
$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr} \qquad P = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \qquad P_r = \frac{1}{3}aT^4$$
$$\rho_r = aT^4 \qquad < K >= -\frac{1}{2} < U >$$

generell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2 \qquad \frac{M_{\rm m}}{M_{\rm kg}} = \frac{G}{c^2}$$
$$\Delta t_{\rm shell} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t \qquad \Delta r_{\rm shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$$
$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \qquad \frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$
$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad \Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$
$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad \frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$
$$\frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]} \qquad r_{\rm crit} = \frac{(L/m)^2}{2M}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{(L/m)^2}}\right)$$
$$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$
$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t \qquad b = \frac{L}{p}$$
$$V_{\rm eff} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \qquad b_{\rm crit} = 3\sqrt{3}M$$
$$\Delta\phi = \frac{4M}{R} \qquad \theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\rm source}-d_{\rm lens})}{d_{\rm lens}d_{\rm source}}}$$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \qquad \varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \qquad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31} \mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41} \qquad \varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18} \mathrm{Wm}^6/\mathrm{kg}^3$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$L \propto M^4 \qquad t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2 \qquad E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12 m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \qquad P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20 m_e} n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3} \qquad < E_K >= \frac{3}{5} E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20 m_e G}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^{5/3} M^{-1/3} \qquad M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^2 \approx 1.4 M_\odot$$