UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 13. desember 2017, 14.30 – 18.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

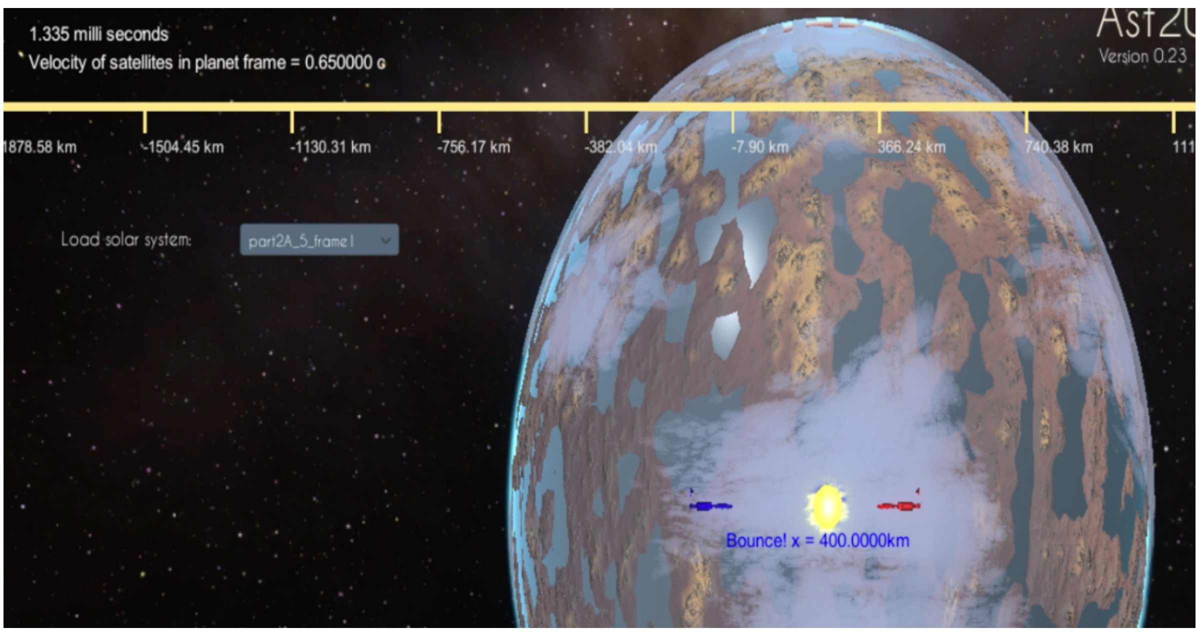
Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 11 deloppgaver som alle teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

OPPGAVE 1: Vi skal spille kosmisk ping-pong med en laserstråle: To romskip er i en fast avstand av L fra hverandre (i romskipsystemet). Begge romskip beveger seg med samme fart i forhold til planeten under. Ved $t = t' = 0$ så sender romskipet som på dette tidspunktet er i posisjon $x = x' = 0$ laserstrålen mot det andre romskipet som er i posisjon $x' = L$ i romskipsystemet. I dette øyeblikket så er romskipet som sender ut strålen ved en romstasjon som står stasjonœrt fast ved $x = 0$ i planetsystemet. Begge romskip har speil foran slik at strålen blir sendt frem og tilbake mellom romskipene.

Vi kaller utsendelsen av strålen for event A, første refleksjon for event B og refleksjonen når strålen er tilbake der den ble sendt ut for event D. Det finnes også et event C: en eksplosjon som skjer på den stasjonœre romstasjonen samtidig som event B sett fra romskipsystemet. Vi bruker koordinater (x, t) for planetsystemet og (x', t') for romskipsystemet. Romskipene beveger seg med hastighet $v = 0.65$ i negativ x-retning sett fra planetsystemet.



Figur 1: Event B i romskipenes referansesystem. Laserstrålen blir i dette øyeblikket reflektert på det røde romskipet til høyre i posisjonen som blir oppgitt på bildet. Tidspunktet vises øverst til venstre. Vi ser også eksplosjonen (event C) på romstasjonen som er plassert i $x = 0$ i planetens referansesystem.

Figur 2: Event B i planetens referansesystem. Laserstrålen blir i dette øyeblikket reflektert på det røde romskipet til høyre i posisjonen som blir oppgitt på bildet. Tidspunktet vises øverst til venstre. Vi ser også romstasjonen som er plassert i $x = 0$ i planetens referansesystem (den hvite skiven).

(a) Kan du **uten regning** si om tiden Δt_{AB} og Δt_{BD} er like store eller forskjellige i planetsystemet? Og i romskipsystemet? Her må du forklare nøye hvordan det blir og nøyaktig hvorfor, du får kun poeng for forklaringen.

(b) Du skal nå velge om du er i planetsystemet eller i romskipsystemet. Skriv tydelig hvilket system du velger.Du skal nå skrive opp posisjonene og tidspunktene til event A og B i ditt referansesystem, samt for event A i det andre referansesystemet. Posisjon x_B og tidspunkt t_B for event B i det andre systemet er ukjente størrelser. For å finne tidspunkt og posisjon for event B i ditt system (og kun i ditt system), bruk figur 1 hvis du har valgt romskipsystemet og figur 2 hvis du har valgt planetsystemet. **Skriv alle tallene for posisjoner og tider uttrykt i millisekunder.** Merk at måleunøyaktigheter i tallene på figuren gjør at tallene ikke er helt korrekte.

(c) Du skal nå bruke invarians av tidromsintervallet mellom event A og B til å finne en relasjon mellom de to ukjente x_B og t_B i det andre referansesystemet: Vis at denne relasjonen gir $x_B = t_B$ (eller $x'_B = t'_B$ avhengig av hvilket system du er i). **Merk at måleunøyaktigheter i tallene på figuren gjør at tallene ikke er helt korrekte. Et tall som er mindre enn** $0.02\mathrm{ms}^2$ **er konsistent med 0 og kan settes til 0**. **Merk også:** du må ha med alle mellomregninger slik at vi tydelig ser hvordan du regnet og kom frem til svaret for å få poeng på denne oppgaven. **Forklar så hvorfor du lett kunne ha funnet dette svaret uten regning, kun ved fysisk resonnement.**

(d) Event C er samtidig med event B i romskipsystemet. I planetsystemet kan man regne ut at event B skjer før event C (men du skal **ikke** regne ut det her!). Dette må nødvendigvis være slik, event C kunne ikke ha skjedd før event B i planetsystemet. Hvordan kunne du ha kommet til denne konklusjonen uten noe regning? **Gi argumenter som sannsynliggjør at event B skjer før C i planetsystemet. Hint:** Du kan for eksempel tenke deg at du har en observatør som befinner seg i romskipenes referansesystem og som står i posisjonen akkurat midt i mellom event B og C når disse to eventene skjer. Tenk gjennom når denne observatøren vil se laserstrålen og eksplosjonen. Bruke gjerne figurene hvis disse hjelper deg til å se situasjonen for deg. Du vil få poeng for alle argumenter som på en eller annen måte sannsynliggjør at event B skjer før C i planetsystemet

OPPGAVE 2:

(a) Forklar nøye hvorfor energi-bevegelsesmengde-firervektoren for et foton som går langs x-aksen kan skrives som:

$$P_\mu^\gamma = (E, E, 0, 0)$$

der E er energien til fotonet. Pass på å forklare hvorfor hver av de fire elementene i vektoren ser slik ut, pass spesielt på å argumentere for det andre elementet i vektoren. Kanskje du kan bruke et uttrykk i formelsamlingen (men ikke nødvendigvis).

(b) Bruk dette til å vise at energien til dette fotonet sett fra et referansesystem som beveger seg med hastighet v langs x-aksen er gitt ved

$$E' = E\gamma(1 - v)$$

der $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Vis hvordan du regner.

OPPGAVE 3: To observatører, observatør 1 og observatør 2, befinner seg i ro i avstandene $r_1 = 3792$ km og $r_2 = 30911$ km fra et sort hull med masse $M = 1171$ solmasser. Klokkene til de to observatørene synkroniseres ved midnatt.

(a) Observatøren nærmest det sorte hullet (observatør 1) våkner klokken 07:00. På hvilket klokkeslett våkner hun målt med langt-vekk-observatørens klokke? (langt-vekke-observatøren er altså ikke observatør 2, men en observatør som befinner seg så langt vekk at vi kan se bort fra tyngdefeltets påvirkning).

(b) Bruk dette til å finne ut når hun våkner målt på klokka til observatør 2.

OPPGAVE 4: Langt inn i fremtiden så eksploderer en supernova i solas nabolag. Stjerna som eksploderte hadde en masse på 20 solmasser da den var på hovedserien.

(a) Tegn et HR-diagram. (**Bruk en hel A4 side til diagrammet siden du skal tegne videre på dette diagrammet i de neste oppgavene**) Pass på å:

- Ha med tall og enheter på aksene.
- På y-aksen kan du godt bruke enheter normalisert til sola, slik at sola er 1. Pass på at y-aksen er logaritmisk og går til minst omkring 10^9 for at du skal få god plass til å tegne. Du bør ha 1-tallet ganske langt ned på y-aksen og trenger ikke å gå til lenger enn omkring 10^{-4} under 1-tallet.
- På x-aksen skal du bruke den enheten som er vanlig i et HR-diagram (ikke bruk spektralklasse).
- Marker **hovedserien**, **området med kjempestjerner** (i kjempegrenen finner man både sub giants, red giants og horizontal branch giants men du trenger ikke markere hver av disse separat i denne oppgaven), **superkjemper** (asymptotic branch giants) og **hvite dverger** i diagrammet.

(b) Du skal nå plassere stjerna på hovedserien i HR-diagrammet ditt og forklare hvordan du kommer frem til denne posisjonen. For å beregne hvor stjerna skal være i HR-diagrammet skal du bruke massen til stjerna som utgangspunkt.

(c) Skisser omtrentlig stjernas vei i HR-diagrammet fra hovedserien til den eksploderer som supernova. Bruk piler. Marker de forskjellige stadiene i stjernas liv tydelig i diagrammet (trenger ikke noe mer her, kun posisjon og navn på hvert stadium inntegnet i HR-diagrammet)

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \qquad I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$$
$$L = \frac{dE}{dt} \qquad F = \frac{dE}{dAdt}$$
$$F = \sigma T^4 \qquad v = H_0 d_p$$
$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \qquad m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$
$$M_V = -2.81\log_{10}P_d - 1.43 \qquad \lambda_{\max}T = 0.0029\ m\ K$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right) \qquad V_\mu = \gamma(1,\vec{v}) \qquad m^2 = E^2 - p^2$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT \qquad N = \frac{M}{\mu m_H} \qquad M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$
$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr} \qquad P = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \qquad P_r = \frac{1}{3}aT^4$$
$$\rho_r = aT^4 \qquad < K >= -\frac{1}{2} < U >$$

generell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2 \qquad \frac{M_{\text{m}}}{M_{\text{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$
$$\Delta t_{\text{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t \qquad \Delta r_{\text{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$$
$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \qquad \frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$
$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad \Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$
$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad \frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$
$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]} \qquad \Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$
$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t \qquad b = \frac{L}{p}$$
$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \qquad b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$
$$\Delta\phi = \frac{4M}{R} \qquad \theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}}-d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$
$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \qquad \varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$
$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \qquad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$
$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41} \qquad \varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\mathrm{Wm}^6/\mathrm{kg}^3$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$L \propto M^4 \qquad t \propto 1/M^3$$
$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2 \qquad E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$
$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \qquad P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3}$$
$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3} \qquad < E_K >= \frac{3}{5}E_F$$
$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3} \qquad M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$