UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 17. desember 2018, 09.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

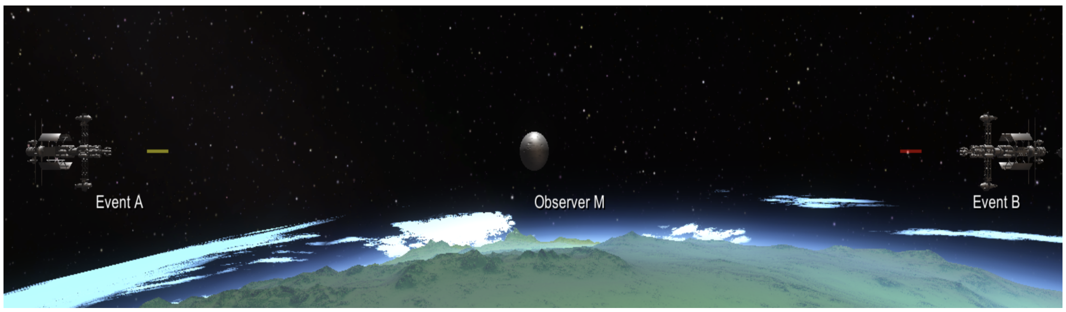
Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 11 deloppgaver som alle teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

OPPGAVE 1: I denne oppgaven skal vi anta at vi ikke kjenner til relativitetsteori, men vi vet at lyshastigheten er den samme i alle referansesystem. To romskip, som er i et felles referansesystem, skyter begge en laserstråle mot det andre romskipet. Dette betegnes som hendelse (event) A og B (A er at venstre romskip skyter). Vi ser situasjonen i figur 1. I referansesystemet til romskipene blir strålene skutt ut samtidig. Midt i mellom de to romskipa er observatør M(idten). Observatør M er i ro i romskipenes referansesystem.



Figur 1: For oppgave 1

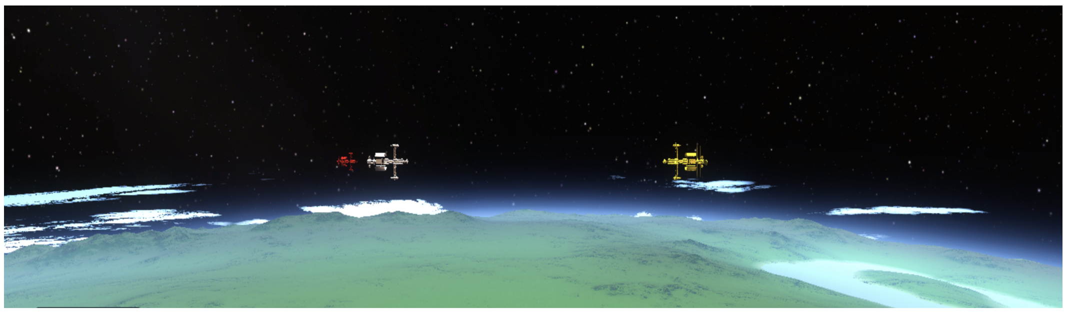
(a) Hvorfor vil observatør M observere hendelse A og B som samtidige? (merk at vi vet at hendelsene er samtidige for M siden hun er i samme referansesystem som romskipene, spørsmålet er hvorfor hun også vil *observere* disse hendelsene samtidig?). Svaret skal være på en setning.

(b) Nå skal vi prøve å finne ut hva en observatør som står på en planet like under romskipene observerer. Romskipene og observatør M beveger alle seg mot høyre med samme hastighet v (som er nær lyshastigheten) i forhold til planetsystemet. Bruk at

- vi vet at M ser de to laserstrålene krysse akkurat ved hennes posisjon samtidig,
- vi vet at M er midt mellom romskipene,
- vi vet at lyserstrålene ble sendt ut samtidig i romskipsystemet

for å konkludere at i planetsystemet så kan laserstrålene ikke ha blitt sendt ut samtidig. Argumenter samtidig for hvilken stråle som blir sendt ut først i planetsystemet. **Det blir kun gitt poeng på argumentasjonen som skal være uten bruk av matematikk.**

OPPGAVE 2: To romskip er på kollisjonskurs langs x-aksen. Vi ser situasjonen i figur 2. Det store romskipet til venstre kaller vi A og det andre store romskipet kaller vi B. Romskip A har en positiv hastighet v langs x-aksen i forhold til planeten under, mens romskip B har en hastighet $-v$ i motsatt retning langs den samme aksen. Rett bak romskip A følger et lite rødt romskip som vi kaller C. Romskip C har samme hastighet som romskip A. Romskip A og B kolliderer og i eksplosjonen blir fotoner med energi E sendt ut. Observatørene i romskip C observerer at fotonene som kommer rett mot dem langs x-aksen har energi E'



Figur 2: For oppgave 2

(a) Forklar nøye hvorfor energi-bevegelsesmengde firervektoren for et foton med energi E som går i positiv retning langs x-aksen kan skrives som

$$P_\mu = (E, E, 0, 0).$$

Det blir her kun gitt poeng for forklaringen. Forklar nøye for hver av de 4 elementene i vektoren.

(b) Bruk 4-vektorer og transformasjonsegenskapene til 4-vektorer til å vise at energien E' som observatørene i romskip C måler at fotonene som de mottar har kan skrives som (i relativistiske enheter)

$$E' = E\gamma(1 \pm v)$$

og avgjør om det skal være pluss- eller minustegn foran v. Forklar nøye hvordan du kommer frem til dette uttrykket. Definer γ.

(c) Vis at den relativistiske Dopplerformelen kan skrives som (i relativistiske enheter)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

Husk at energien til et foton er gitt ved $E = hc/\lambda$ (i SI enheter).**Merk: Avhengig av hvordan du regner kan du ende opp med andre fortegn foran v. Dette er like riktig, men du må forklare hva fortegnet avhenger av og hvordan du kan vite hvilket fortegn som skal brukes i hvilken situasjon.**

(d) Finn hvilken farge observatørene i romskip C ser at eksplosjonen har hvis eksplosjonen er gul i planetsystemet. Anta at hastigheten v er

farge	bølgelengdeområde (nm)
fiolett	380-450
blå	450-495
grønn	495-570
gul	570-590
oransje	590-620
rød	620-750

Tabell 1: bølgelengdeområdet for hovedfargene

20% av lyshastigheten. I tabell 1 finner du bølgelengdeområdet for hovedfargene.

OPPGAVE 3: Vi vil nå bruke en forenklet modell av sola til å anslå temperaturen i solas kjerne. Vi skal gjøre dette steg for steg. Anta at sola har uniform tetthet ρ_0 gjennom hele.

(a) Finn et uttrykk for total masse $M(r)$ av kula på innsiden av en gitt radius r. Forklar hvordan du tenker.

(b) Vi vil nå anta at gassen i sola er ideel gass og at trykket utelukkende kommer fra gasstrykk, ikke strålingstrykk. Bruk hydrostatisk likevekt til å vise følgende sammenheng for temperaturen som funksjon av avstand r fra sentrum:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 r \frac{\mu m_H}{k}$$

der μ er midlere molekylvekt (antar at denne er den samme i hele sola), m_H er hydrogenmassen (som vi antar er lik protonmassen) og k er Boltzmannkonstanten. **Gjør utledningen skritt for skritt slik at vi tydelig ser hvordan du tenker, det er selve utledningen og forklaringer/tenkemåte du får poeng for her, ikke svaret siden dette er gitt.**

(c) Integrer denne likningen fra kjernen ved $r = 0$ til solas overflate ved $r = R$ og vis at temperaturen T_C i solas kjerne kan skrives som

$$T_C = T(R) + \frac{2\pi}{3} G R^2 \rho_0 \frac{\mu m_H}{k}.$$

Gjør utledningen skritt for skritt slik at vi tydelig ser hvordan du tenker, det er selve utledningen og forklaringer/tenkemåte du får poeng for her, ikke svaret siden dette er gitt.

(d) Anta at sola utelukkende består av protoner. Bruk verdier fra formelsamlingen for solas masse, solas radius og overflatetemperatur for å finne et uttrykk for ρ_0 og dermed kjernetemperaturen T_C.

OPPGAVE 4: Anta at det kun er pp-kjeden som produserer energien i sola. Anta også at all energi produseres innenfor en radius $R < R_C$ i solas kjerne. Anta også at tetthet, temperatur og masseforhold (mass fractions) av grunnstoffer er uniformt fordelt i hele kula med radius R_C. Bruk tall i formelsamlingen for solas luminositet, samt en kjernetetthet på $\rho = 1.5 \times 10^6 \text{kgm}^{-3}$, en kjernetemperatur på $T = 1.57 \times 10^7 \text{K}$ og anta at hydrogen utgjør 33% av massen til kjernen. Finn radien R_C **uttrykt i solradier.**

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$

$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$

$F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$

$v = H_0 d_p$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$

$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$

$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$

$\lambda_{\max} T = 0.0029\ m\ K$

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ $\quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$ $\quad V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$ $\quad m^2 = E^2 - p^2$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\rm rel} & -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & \gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$< E_K >= \frac{3}{2}kT$

$N = \frac{M}{\mu m_H}$

$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$

$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$

$P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$

$< K >= -\frac{1}{2} < U >$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$

$\frac{M_{\rm m}}{M_{\rm kg}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\rm shell} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$

$\Delta r_{\rm shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$

$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$\frac{V_{\rm eff}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$

$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$

$b = \frac{L}{p}$

$V_{\rm eff} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$

$b_{\rm crit} = 3\sqrt{3}M$

$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$

$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\rm source} - d_{\rm lens})}{d_{\rm lens}d_{\rm source}}}$

kjernereaksjoner:

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$ $\qquad$ $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$

$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$ $\qquad$ $\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \mathrm{Wm^3/kg^2}$

$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$ $\qquad$ $\varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31} \mathrm{Wm^3/kg^2}$

$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$ $\qquad$ $\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18} \mathrm{Wm^6/kg^3}$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$L \propto M^4$ $\qquad$ $t \propto 1/M^3$

$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$ $\qquad$ $E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$

$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12 m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$ $\qquad$ $P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3}$

$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$ $\qquad$ $< E_K >= \frac{3}{5} E_F$

$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20 m_e G}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$ $\qquad$ $M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^2 \approx 1.4 M_\odot$