UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 16. desember 2019, 09.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 7 sider

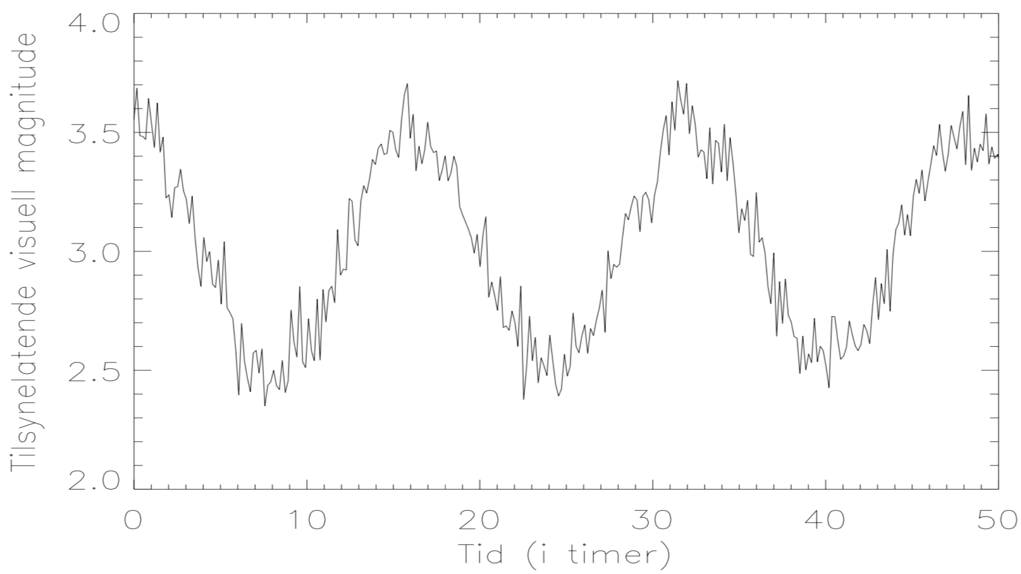
Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Det er totalt 9 deloppgaver som alle teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.



Figur 1: For oppgave 1:Observert tilsynelatende (visuell) magnitude som funksjon av tiden for Cepheiden.

Oppgave 1

Vi er i år 3152 og du er på vei med rombussen for å besøke familie som har flyttet til en fjern planet mange lysår borte. Plutselig oppstår det et alvorlig problem med rombussen og du må gå over i et nødromskip som kort tid etter krasjlander på en ukjent planet. Heldigvis har planeten både oksygen og vegetasjon som du kan livnære deg på. Du har med teleskopet ditt og begynner å prøve å orientere deg litt om hvor du er.

1. Om natta ser du en veldig sterk stjerne på himmelen (vi kaller den stjerne B) som ser ut til å forandre lysstyrke regelmessig. I figur 1 ser du hvordan den tilsynelatende størrelseklassen (appaerent magnitude) varierer med tiden. Du finner ut at det er en Cepheidestjerne. Omtrent hvor langt unna er stjerna?

2. Stjerna som planeten går i bane rundt (altså 'sola' i dette ukjente solsystemet), vi kaller den stjerne A, lyser med et sterkt blått lys som gjør at hele landskapet ser blått ut. Du anslår at fargen er så sterk at den meste strålingen nok kommer fra ultraviolett lys omkring $\lambda = 300$nm. Kan du gi et røft estimat av massen til stjerne A (du kan bruke det du vet om sola vår) ?

Oppgave 2

1. Et fjernt objekt beveger seg i forhold til oss med en hastighet v som er nær lyshastigheten. Vi definerer en x-retning som går fra jorda mot objektet. Hastigheten v er langs denne x-aksen. Lys med bølgelengde λ i hvilesystemet til objektet blir sendt ut fra objektet mot oss. Vi observerer at lyset har bølgelengde λ'. Skriv ned energi-moment-firer-vektoren (momenergy four-vector) til et foton i dette lyset både i objektets hvilesystem og i vårt referansesystem uttrykt ved λ og λ'.
   Hint: Hvis du er usikker på hvordan dette gjøres, sett først opp den generelle energi-moment-firer-vektoren for et objekt og igjenkjenn relativistisk energi og bevegelsesmengde. Bruk så disse størrelsene for fotoner. Du bør kjenne hva energien til et foton gitt ved bølgelengden er. Du vet også at fotonet er masseløst og kan bruke dette til å finne fotonets bevegelsesmengde. Husk videre at bevegelsesmengde har en retning.

2. Bruk transformasjonsegenskaper til firer-vektorer for å komme frem til den relativistiske Dopplerformelen. Hvis du ikke fikk til forrige oppgave, skriv bare inn noen generelle symboler inn i 4-vektorene og regn så godt du kan med disse størrelsene.

Oppgave 3

Observatør A befinner seg i romskip A i en avstand av $r = 1AU$ fra et sort hull. Romskip A står stille i forhold til det sorte hullet. Observatør B befinner seg i et annet romskip, romskip B, som er i fritt fall radielt innover mot det sorte hullet. Ved $t = 0$ så passerer romskipet B rett forbi romskipet A med en hastighet på $0.295c$. Massen til det sorte hullet er $M = 1.16 \times 10^7 M_\odot$ (solmasser). Romskip A sender kontinuerlig ut lysglimt mot romskip B med et fast tidsintervall på 1 sekund mellom hvert glimt. For å gjøre det lett å regne, anta at lys kommer frem instantant slik at observatører i romskip B ser lysglimtene fra romskip A i samme øyeblikk som de sendes ut.

1. Bruk uttrykket for relativistisk energi samt noen transformasjoner mellom skallobservatører og langt-vekk-observatøren til å vise at energi per masse for romskip B er gitt ved

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau},$$

   og finn fysiske tolkninger av størrelsene r, dt_{shell} og $d\tau$. **MERK:** Kun 20% av poengene på denne oppgaven gies på den matematiske utledningen. De resterende 80% gies på den fysisk forklaringen bak der det kommer tydelig frem hva du gjør og hvorfor, samt på tolkningen av størrelsene. Bruk gjerne et fysisk eksempel for å tolke/gi mening til disse størrelsene.

2. Vis at dette kan skrives som

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\gamma_{\text{shell}},$$

og forklar nøye fysikken bak hvordan du kommer frem til dette uttrykket. **Sett inn tall og gi svaret i J/kg**. **MERK:** I denne oppgaven teller den matematiske utledningen 20%, tallsvaret i riktige enheter 20%, og selve forklaringen/fysisk forståelse 60%. Igjen så bruk gjerne et eksempel for å forklare fysikken.

3. Fra uttrykket for energi, kan man vise at (**det er ikke meningen at du skal vise dette!**):

$$\Delta\tau(r) = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{E/m}\Delta t,$$

der $\Delta\tau$ er tidsintervall mellom to etterfølgende lysglimt (fra romskip A som sender ut lysglimtene) målt på klokker i romskip B , Δt er det tilsvarende tidsintervallet observert fra en langt-vekk-observatør og E/m er energi per masse for romskip B mens r er posisjonen til romskip B i det øyeblikket tidsintervallet for lysglimtene måles. Anta at tidsintervallet er så kort at vi kan se bort fra romskipets bevegelse i løpet av den tiden. Bruk dette samt noen transformasjoner mellom observatører til å finne et uttrykk for en sammenheng mellom tidsintervallet mellom etterfølgende lysglimt som observeres fra romskip B, $\Delta t_B(r) = \Delta\tau$, og det tilsvarende konstante tidsintervallet Δt_A mellom de samme etterfølgende lysglimt målt på klokker i romskip A (der lysglimtene sendes ut).

4. Følgende spørsmål teller hver 50% av poengsummen på denne oppgaven:

   (a) Diskuter hvordan observator B vil se lysglimtene fra romskip A ettersom romskip B nærmer seg hendelsehorisonten. Få med noe om hva som skjer med tidsintervallet mellom lysglimt og evt. andre observerbare effekter.

   (b) Du bør se noe paradoksalt/problematisk i svaret ditt, hva er det? Kan du forklare hvilken effekt vi har oversett i utregningene våre og hvorfor og hvordan denne effekten løser paradokset/problemet. (du skal ikke gjøre noen regninger her, kun forklare)

Oppgave 4

Her skal vi modellere jordas atmosfære. Vi skal anta isoterm atmosfære, altså at temperaturen overalt er T. Anta at vi kan se bort ifra endringer i gravitasjonsakselrasjonen g med høyde. Anta videre at atmosfæren er en ideel gass som er i hydrostatisk likevekt. Finn et uttrykk for trykket $P(h)$ som funksjon av høyden h over overflaten. Uttrykket skal inneholde en referansehøyde h_0 samt trykket $P(h_0)$ ved denne referansehøyden, gravitasjonsakselrasjonen g, midlere molekylvekt μ, temperaturen T, samt naturkonstanter.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$ $\qquad$ $I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$ $\qquad$ $F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$ $\qquad$ $v = H_0 d_p$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$ $\qquad$ $m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$

$M_V = -2.81\log_{10}P_d - 1.43$ $\qquad$ $\lambda_{\max}T = 0.0029\ m\ K$

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ $\qquad$ $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$ $\qquad$ $V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$ $\qquad$ $m^2 = E^2 - p^2$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$< E_K >= \frac{3}{2}kT$ $\qquad$ $N = \frac{M}{\mu m_H}$ $\qquad$ $M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$ $\qquad$ $P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$ $\qquad$ $P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$ $\qquad$ $< K >= -\frac{1}{2} < U >$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$ $\qquad$ $\frac{M_{\text{m}}}{M_{\text{kg}}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\text{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$ $\qquad$ $\Delta r_{\text{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$ $\qquad$ $\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$ $\qquad$ $\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$ $\qquad$ $\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$ $\qquad$ $\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$ $\qquad$ $b = \frac{L}{p}$

$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ $\qquad$ $b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$

$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$ $\qquad$ $\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \qquad \varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12}\mathrm{Wm^3/kg^2}$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \qquad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\mathrm{Wm^3/kg^2}$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41} \qquad \varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\mathrm{Wm^6/kg^3}$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$L \propto M^4 \qquad t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2 \qquad E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12 m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \qquad P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3} \qquad < E_K >= \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20 m_e G}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^{5/3} M^{-1/3} \qquad M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{A m_H}\right)^2 \approx 1.4 M_\odot$$