

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 16. desember 2021, 09.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 12 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst

Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevnt hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

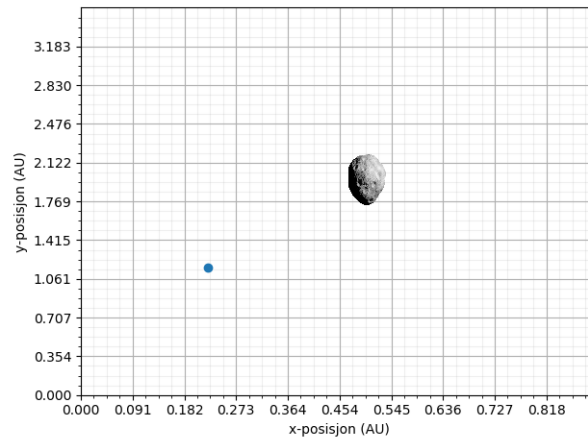
Oppgave 1 og oppgave 2 teller hver 50% på karakteren. Deloppgavene innen hver av disse to oppgavene teller likt innenfor den gitte oppgaven.

Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Oppgave 1: Kortsvarsoppgaver.

1. Hva er midlere hastighetskomponent v_x til partiklene i en ideel gass? (mid-del tatt over alle partiklene i gassen). **Forklare med en setning hvorfor det blir slik. Du får kun poeng på forklaringen, ikke på riktig svar.**

Figur 1

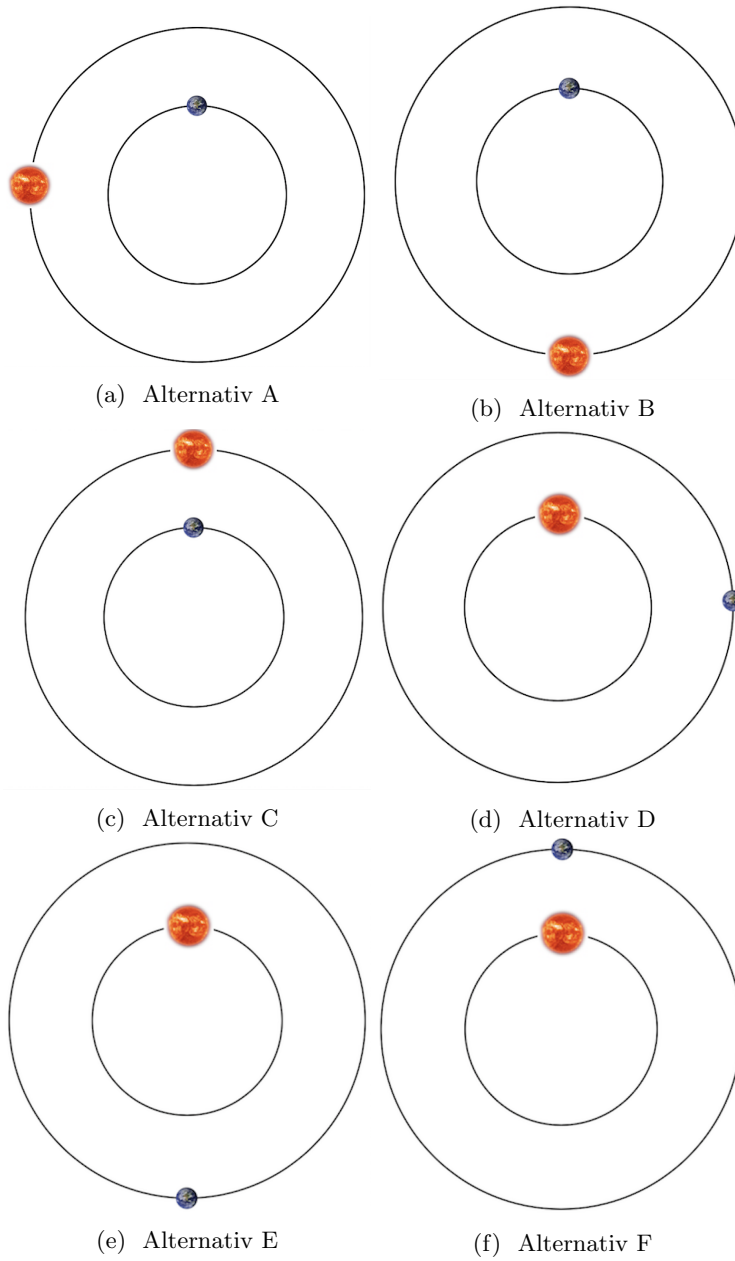


2. I figur 1 ser du en asteroide i en gitt posisjon (se bort fra den blå sirkelen i denne oppgaven). Posisjonsvektoren \vec{r} til midtpunktet i asteroiden er gitt ved

$$\vec{r} = a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta.$$

Finn verdier for a og b med enheter. Forklar med en setning og/eller en figur hva du gjør, forklaringen er viktig her siden avlesningen blir unøyaktig.

3. I figur 2 ser du noen snapshot fra et stjerne-planet-system. Du ser stjerna og planeten samt disses baner. Kun et av disse snapshotene kan være reelt. Hvilket av de 6 alternativene A-F kan være en reel 2-legeme-situasjon? Forklar svaret med maks 3 setninger. Merk at du kun får poeng for resonementet her, ikke for riktig svar.
4. Stjerne A har absolutt størrelseklasse 8.4 og tilsynelatende størrelseklasse 2.1. Stjerne B har absolutt størrelseklasse 0.3 og tilsynelatende størrelseklasse 6.8. Hvilken av dem er nærmest? Begrunn svaret uten regning. Du får kun poeng på begrunnelsen, ikke på riktig svar.
5. Anta en gass der halvparten av partiklene er oksygenmolekyler (O_2 , der et oksygenatom har 8 protoner og 8 nøytroner i kjernen og det er 2 atomer i et molekyl) og den andre halvparten er heliumatomer (He , 2 protoner



Figur 2: Sol-planet-konfigurasjoner

og 2 nøytroner i kjernen). Hva er den enhetsløse midlere molekylvekt μ til gassen? Trenger kun å angi tallsvaret.

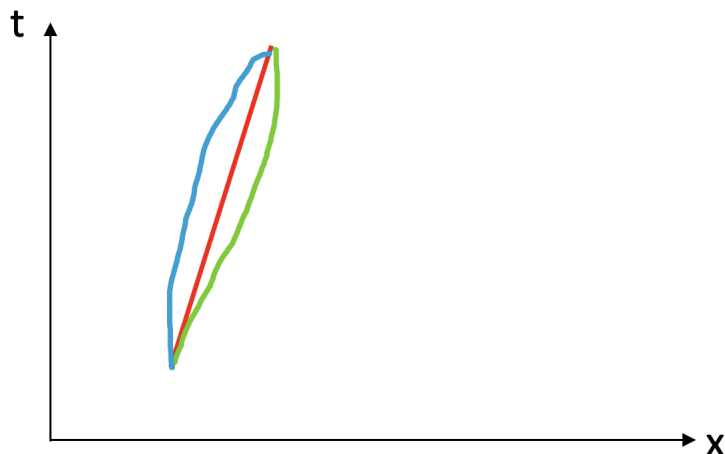
6. For stjerner i sirkelbane rundt sentrum av en galakse, blir det riktig at vi kan skrive banefarta til disse stjernene ved sentripetalhastigheten:

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

der $M(r)$ er totalmassen (av alle former for masse) innenfor banen? Gi en kort begrunnelse på hvorfor/hvorfor ikke, og tenk deg godt om før du svarer. Du får kun poeng på begrunnelsen, ikke på riktig svar.

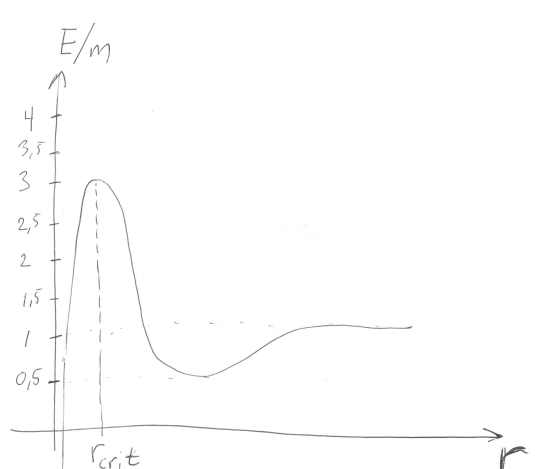
7. Kan du beskrive kvalitativt hvordan partiklene i en ideel gass er fordelt i \vec{p} -rommet og hva du bruker/hvordan du tenker for å finne det ut? Maks 3 setninger pluss evt. figur hvis du ønsker.
8. Astronaut A reiser i rett linje fra jorda til nabostjernen Proxima Centauri med en konstant hastighet v som er nær lyshastigheten. I det astronaut A passerer jorda viser klokken på jorda $t = 0$. Astronaut A sin klokke stilles også til $t = 0$ i dette øyeblikket. Avstanden i jordas hvilesystem (som her også regnes som Proxima Centauries hvilesystem) er L . I astronautens hvilesystem så er avstanden L/γ på grunn av lengdekontraksjon. I en ukjent avstand bak astronaut A er det et annet romskip med astronaut B i samme referansesystem som astronaut A. Begge reiser langs den samme rette linja med samme fart. I det astronaut A passerer jorda har astronaut B altså enda ikke passert jorda siden han befinner seg bak A men reiser på den samme rette linja. I det astronaut A kommer frem til Proxima Centauri så viser klokka hennes naturligvis $L/(v\gamma)$. I samme øyeblikk (i astronautenes referansesystem) så passerer astronaut B jorda. Når jordboerene ser at romskipet til astronaut B passerer så kikker de på klokka si. Ser jordboerene at klokka er L/v ? Hvorfor/hvorfor ikke? Forklar gjerne med et grunnleggende prinsipp.

Figur 3: (E) Tidromdiagram for 3 biler

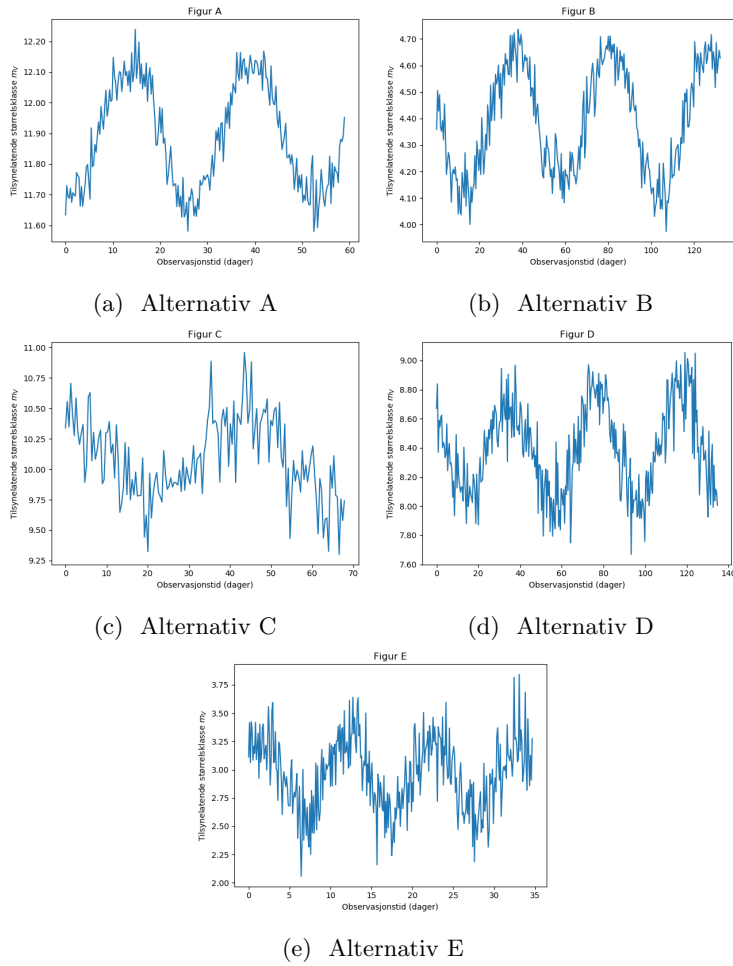


9. I tidromdiagrammet i figur 3 ser du 3 biler som ved $t = 0$ er i samme x -posisjon og etter en viss tid igjen befinner seg i samme x -posisjon. Målt fra bakkens referansesystem (som er det referansesystemet som tidromsdiagrammet er tegnet i) så tok det 10 sekunder fra bilene møttes til de møttes i samme x -posisjon for 2.gang. På klokkene i bilene tok det 3 sekunder for den ene bilen, 5 sekunder for den andre og 7 sekunder for den siste bilen. Hvilken av bilene tok det 7 sekunder for? Den røde, den blå eller den grønne? Merk at det ikke trengs noen regning her! Begrunn svaret med en setning. Du får kun poeng på begrunnelsen her, ikke på riktig svar.
10. Bruk prinsippet om maksimal aldring til å forklare hvorfor ting faller til bakken. Svar med maks 5 setninger, uten likninger.

Figur 4



11. I figur 4 ser vi det effektive potensialet for et objekt i fritt fall omkring et sort hull med masse M . Er den kritiske radien r_{crit} lik Schwarzschildradien $r_{\text{crit}} = 2M$? Hvorfor/hvorfor ikke, forklar med maks 3 setninger og kun med ord, ikke med likninger. Hvis du svarer 'nei', si også om $r_{\text{crit}} < 2M$ eller $r_{\text{crit}} > 2M$ og forklar hvorfor det må være slik.
12. I figur 5 finner du observert tilsynelatende visuell størrelseklasse m_V (med støy) som funksjon av observasjonstid for 5 forskjellige Cepheide-stjerner. Hvilken av disse stjernene er nærmest oss? A, B, C, D eller E? **Du skal ikke regne, kun resonner** (skriv maks 3 setninger for å forklare tankegangen din). Du får kun poeng for resonnementet, ikke for riktig figur, pass derfor på at forståelsen kommer frem.
13. Under finner du masse, tetthet og temperatur til 5 forskjellige gass-skyer. **Avgjør uten regning hvilke av disse som har størst sannsynlighet for å kollapse til en stjerne (skriv en setning (og ikke fler!) for å forklare tankegangen din).**
 - Gass-sky A har masse på 22.10 solmasser, temperatur på 26.30 Kelvin og tetthet 3.09×10^{-19} kg per kubikkmeter
 - Gass-sky B har masse på 8.70 solmasser, temperatur på 77.00 Kelvin og tetthet 4.67×10^{-22} kg per kubikkmeter
 - Gass-sky C har masse på 2.10 solmasser, temperatur på 82.90 Kelvin og tetthet 4.61×10^{-22} kg per kubikkmeter
 - Gass-sky D har masse på 5.40 solmasser, temperatur på 17.10 Kelvin og tetthet 1.25×10^{-25} kg per kubikkmeter
 - Gass-sky E har masse på 13.00 solmasser, temperatur på 59.90 Kelvin og tetthet 1.42×10^{-21} kg per kubikkmeter



Figur 5: Tilsynelatende størrelseklasse m_V som funksjon av tid for Cepheidestjerner

14. Kan du bruke fysiske prinsipper du har lært om stjerner og stjernedannelse til å argumentere for hvorfor det finnes det en maksimumsgrense for hvor stor masse en stjerne kan ha? Gjerne grunnleggende fysiske sammenhenger om gasser. Svar med maks 3 setninger.
15. En asymptotisk kjempe har en kjerne av karbon og oksygen. For mindre massive stjerner så fusjonerer ikke disse grunnstoffene videre til tyngre grunnstoffer mens for mer massive stjerner fusjoneres det videre. Hvorfor er det slik? Forklar med maks 2 setninger.

Oppgave 2

1. I en supernovaeksplosjon blir de ytre lagene av en stjerne løftet oppover av trykket nedenfra. Anta at vi kan modellere en supernovaeksplosjon på denne måten: en gasskule som ekspanderer ekstremt raskt. Du kan se på det som om stjerna øker radien R kraftig. Anta at...
 - ...vi ved Doppler-målinger finner at overflaten av denne kula beveger seg utover med en konstant hastighet v ,
 - ...en tid Δt etter at eksplosjonen starter, måler vi en effektiv temperatur på T på overflaten av kula,
 - ...stjernas radius før eksplosjonen var ekstremt mye mindre enn radien til kula ved tiden Δt ,
 - overflaten av kula er et sort legeme,

Skriv et uttrykk for luminositeten L til supernovaen en tid Δt etter eksplosjonen, uttrykt ved: hastighet v , tid Δt , overflate-temperatur T samt tall/naturkonstanter. Forklar godt hvordan du kommer frem til uttrykket. (husk at du kan få tilnærmet full pott her selv med galt svar, så lenge du forklarer godt hvordan du tenker og ideen bak)

2. Anta at supernovaen ble observert i en galakse med ukjent avstand. Overflaten av kula blir ved Dopplermålinger funnet å ha en hastighet 9500 km/s radielt utover. Etter 42 dager er den effektive temperaturen til overflaten 6000K og den har en tilsynelatende størrelseklasse på $m = 10$. **Bruk uttrykket for luminositeten i foregående oppgave til estimere avstanden til supernovaen (og dermed til galaksen). Angi svaret i Mpc.** MERK: Hvis du ikke fikk til foregående oppgave, kan du bruke en luminositet på 10^{36} Watt. Forklar godt hvordan du regner og tenker.
3. Det som ble igjen av supernovaeksplosjonen var en nøytronstjerne med masse M . **Integrer opp** likningen for hydrostatisk likevekt (equation of hydrostatic equilibrium) for å vise at radien R til nøytronstjerna kan skrives som

$$R = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{4/3} \frac{h^2}{10m_n^{8/3} G} M^{-1/3}.$$

Anta at nøytronstjerna har uniform tetthet. Vis **nøye** og **steg for steg** hvordan du kommer frem og begrunn alle formler og tilnærmelser/antagelser du bruker. **Hint:** (1) Anta ikke-relativistiske nøytroner. (2) Finn ut hvordan man kan skrive antaltettheten n_n av nøytroner uttrykt ved massetettheten ρ og nøytronmassen m_n . (3) Hva må trykket være på overflaten av stjerna? (4) Hvor stor er tyngdeakselerasjonen i en avstand r fra sentrum?

4. Anta at det i en eksplosjon på overflaten av nøytronstjerna blir sendt ut en gassklump med masse m_{gass} og med hastighet v_{gass} rett opp fra overflaten til nøytronstjerna. Hastighet v_{gass} er målt i forhold til en observatør på overflaten. Vi skal nå regne relativistisk for å se hva som skjer med gassklumpen (du får ikke poeng for å regne klassisk i denne oppgaven). Ta hensyn til relativitetsteorien både for gravitasjonsfelt og hastighet. Finn et uttrykk for hvor langt ut h fra overflaten av stjerna denne gassklumpen kommer før den faller ned igjen. Svaret skal uttrykkes med m_{gass} og v_{gass} samt nøytronstjernas masse M og radius R . Høyden h måles av langtvekk-observatøren og skal dermed uttrykkes ved langtvekk-observatørens radielle koordinater, ikke høyde målt av skallobservatører.
5. Litt spesiell relativitetsteori til slutt: Vi har en romstasjon og tre romskip som alle (inkludert romstasjonen) har x-posisjon $x = 0$ ved tiden $t = 0$. Alle posisjoner, tider og hastigheter angitt er i romstasjonens referansesystem.
 - Romskip 1 har konstant fart $v = 0.5$ (relativistiske enheter) i positiv x-retning,
 - romskip 2 har konstant fart $v = 0.8$ i positiv x-retning og
 - romskip 3 akselererer i positiv x-retning med konstant akselerasjon fra $v = 0$ ved $t = 0$ til den tar igjen romskip 1.
 - I det romskip 3 tar igjen og kommer i samme x-posisjon som romskip 1, så deselererer romskip 3 med konstant akselerasjon helt til den når $v = 0$ (anta at romskip 3 instantant endrer akselerasjon fra a til $-a$). Tegn et tidromdiagram for denne situasjonen med verdenslinjene for både romstasjonen og alle romskipene, sett (1) fra romstasjonens referansesystem og (2) fra romskip 2 sitt referansesystem. **Du trenger kun å tegne tidromdiagrammene med verdenslinjene (og gjøre det klart hvilke verdenslinjer tilhører hva), ingen forklaring er nødvendig her. Riktig helning på linjene er heller ikke viktig så lenge de mer eller mindre ser riktig ut relativ til hverandre.**

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m²/kg²
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴.
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvningslov: $\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitudo: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitudo: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_{\odot} = 3.827 \times 10^{26}$ W
Solas forventede levetid: $t_{\text{life}} = 10^{10}$ år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$$\begin{aligned}
 B(\nu) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} & I(\nu) &= \frac{dE}{\cos\theta d\Omega dA dt d\nu} \\
 L &= \frac{dE}{dt} & F &= \frac{dE}{dA dt} \\
 F &= \sigma T^4 & v &= H_0 d_p \\
 m_1 - m_2 &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) & m - M &= 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) \\
 M_V &= -2.81 \log_{10} P_d - 1.43 & \lambda_{\max} T &= 0.0029 \text{ m K}
 \end{aligned}$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 \right) \quad V_\mu = \gamma(1, \vec{v}) \quad m^2 = E^2 - p^2$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$$\begin{aligned}
 \langle E_K \rangle &= \frac{3}{2} kT & N &= \frac{M}{\mu m_H} & M_J &= \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \\
 \rho(r) \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr} & P &= \frac{\rho kT}{\mu m_H} & P_r &= \frac{1}{3} aT^4 \\
 \rho_r &= aT^4 & \langle K \rangle &= -\frac{1}{2} \langle U \rangle
 \end{aligned}$$

generell relativitetsteori:

$$\begin{aligned}
 \Delta s^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \Delta \phi^2 & \frac{M_m}{M_{\text{kg}}} &= \frac{G}{c^2} \\
 \Delta t_{\text{shell}} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \Delta t & \Delta r_{\text{shell}} &= \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \\
 \frac{E}{m} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} & \frac{L}{m} &= r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \\
 \Delta t &= \frac{E/m}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta \tau & \Delta \phi &= \frac{L/m}{r^2} \Delta \tau \\
 \Delta r &= \pm \sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right] \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta \tau & \frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} &= \frac{1}{2} \frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r} \\
 \frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]} & \Delta r &= \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{(L/E)^2}{r^2}} \Delta t \\
 r \Delta \phi &= \pm \frac{L/E}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t & b &= \frac{L}{p} \\
 V_{\text{eff}} &= \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} & b_{\text{crit}} &= 3\sqrt{3}M \\
 \Delta \phi &= \frac{4M}{R} & \theta_E &= \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}} d_{\text{source}}}}
 \end{aligned}$$

kjernereaksjoner:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_A Z_B e^2}{r} & \epsilon_{AB} &= \epsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta \\
 \epsilon_{pp} &\approx \epsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 & \epsilon_{0,pp} &= 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3/\text{kg}^2 \\
 \epsilon_{CNO} &= \epsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} & \epsilon_{0,CNO} &= 8.24 \times 10^{-31} \text{Wm}^3/\text{kg}^2 \\
 \epsilon_{3\alpha} &= \epsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_H^3 T_8^{41} & \epsilon_{0,3\alpha} &= 3.86 \times 10^{-18} \text{Wm}^6/\text{kg}^3
 \end{aligned}$$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$$\begin{aligned}
 L &\propto M^4 & t &\propto 1/M^3 \\
 M &\propto T_{\text{eff}}^2 & E_F &= \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3} \\
 \frac{T}{n_e^{2/3}} &< \frac{h^2}{12m_e k} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} & P &= \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3} \\
 P &= \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3} & \langle E_K \rangle &= \frac{3}{5} E_F \\
 R_{\text{WD}} &\approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{20m_e G} \left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3} & M_{\text{Ch}} &\approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot
 \end{aligned}$$