UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 5. desember 2023, 15.00 – 19.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 9 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstå tt fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppgitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Oppgave 1 og oppgave 2 teller hver 50% av evalueringen. Deloppgavene innen hver av disse to oppgavene teller likt innenfor den gitte oppgaven. (10 deloppgaver for oppgave 1, 5 deloppgaver for oppgave 2)

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Oppgave 1: Kortsvarsoppgaver (10 deloppgaver).

I disse oppgavene får du **kun poeng på at begrunnelsen** viser at du forstår resonnementet. **Selve svaret gir ingen poeng selv om det er riktig.**

1. Hvorfor faller ikke sola sammen til et sort hull pga. gravitasjon. Hva holder den oppe? Forklar kort (3-5 setninger) fysikken bak!

2. Bruk prinsippet om maksimal aldring til å resonnere deg frem til Newtons første lov i Lorentz-geometri uten bruk av likninger. Maks 5 setninger.

3. Du skal skissere følgende situasjon med verdenslinjer i et tidromdiagram: Ved tiden $t = 0$ så er 3 biler alle i samme x-posisjon. Bil 1 går med konstant fart, bil 2 går også med konstant fart med rakere enn bil 1. Bil 3 starter i ro ved $t = 0$ og akselererer bit for bit til den når farta til bil 2, deretter fortsetter den med konstant fart. Marker tydelig hvilken verdenslinje som tilhører hvilken bil og gi en **kort** forklaring på maks en setning for hver verdenslinje.

4. Sett at du observerer et fly og måler at flyet har en 4-hastighet V_μ. En annen observatør som kjører forbi med en fart v i forhold til deg observerer det samme flyet. Vil observatøren i bilen observerer en annen 4-hastighet enn deg eller er V_μ en invariant størrelse slik at observatøren i bilen observerer samme 4-hastighet som deg? Begrunn svaret med 2-3 setninger.

5. Hvilke av disse to er riktig matematisk definisjon av 4-hastighet, (A) eller (B)?
$$(A) : V_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} \qquad (B) : V_\mu = \frac{dx_\mu}{dt'}$$
der x_μ er posisjonen til objektet som vi beregner 4-hastigheten til, t er tiden målt på klokka til observatøren som måler 4-hastighet og t' er tiden målt på klokka som følger objektet som vi beregner hastigheten til. Begrunn svaret med en setning der du tydelig viser at du forstår.

6. Forklar stikkordsmessig resonnementet som forklarer hvorfor Tully- Fisher-relasjonen funker. Begynn med bredden av 21cm linja og bruk piler, punkt for punkt til du kommer frem til luminositeten av galaksen.

7. Ved omtrent hvilke temperaturer i stjernenes kjerner har vi normalt fusjonsreaksjoner via proton-proton-kjeden og CNO-syklusen? Hvilke av disse krever høyest temperatur? (her kreves ingen begrunnelse)

8. Du observerere en hovedseriestjerne med fire ganger så høy overflatetemperatur som sola. Hva er massen til stjerna målt i solmasser? Forklar kort, gjerne med likning(er).

9. Vi vet at x-aksen i HR-diagrammet kan ha både temperatur og fargeindekser. Kan du med en setning forklare hva fargeindeks er og med maks 2 setninger forklare hvorfor det er en sammenheng mellom fargeindeks og temperatur.

10. Hva er en nøytronstjerne og hva gjør at den ikke kollapser til et sort hull på grunn av sin egen sterke tyngdekraft? Maks 3 setninger.

Oppgave 2 (5 deloppgaver)

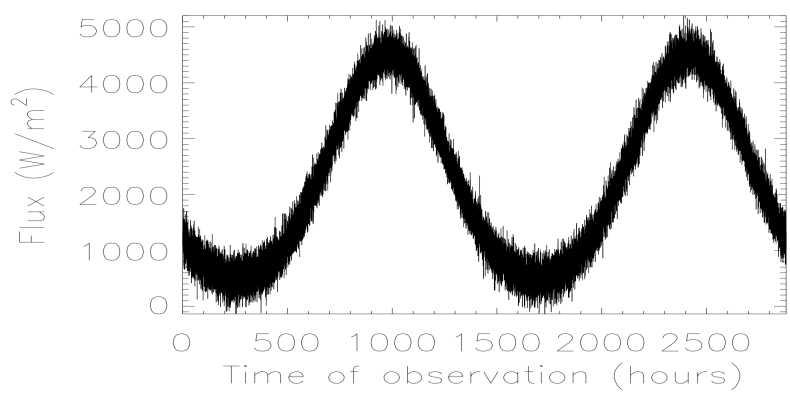
Oppgave 2.1

- **Bakgrunnsinformasjon:** En romsonde står på overflaten av en planet og mottar lys fra stjerna i solsystemet. Vi skal bruke variasjonen i fluksen som funksjon av tiden i løpet av en tidsperiode til å finne eksentrisiteten til planetens bane. I figur 1 ser vi fluksen som sonden måler som funksjon av tiden. Kurven er ikke glatt da det også er mye støy i målingene. Fluksen som sonden mottar kan skrives som

$$F = F_0(1 + 2e\cos\alpha + e^2\cos^2\alpha)$$

der F_0 er en konstant (ukjent) og e er eksentrisiteten til planetbanen (også ukjent). Anta at vinkelen α er en kjent funksjon av tiden t, altså $\alpha(t)$.

Figur 1: Til oppgave 2.1



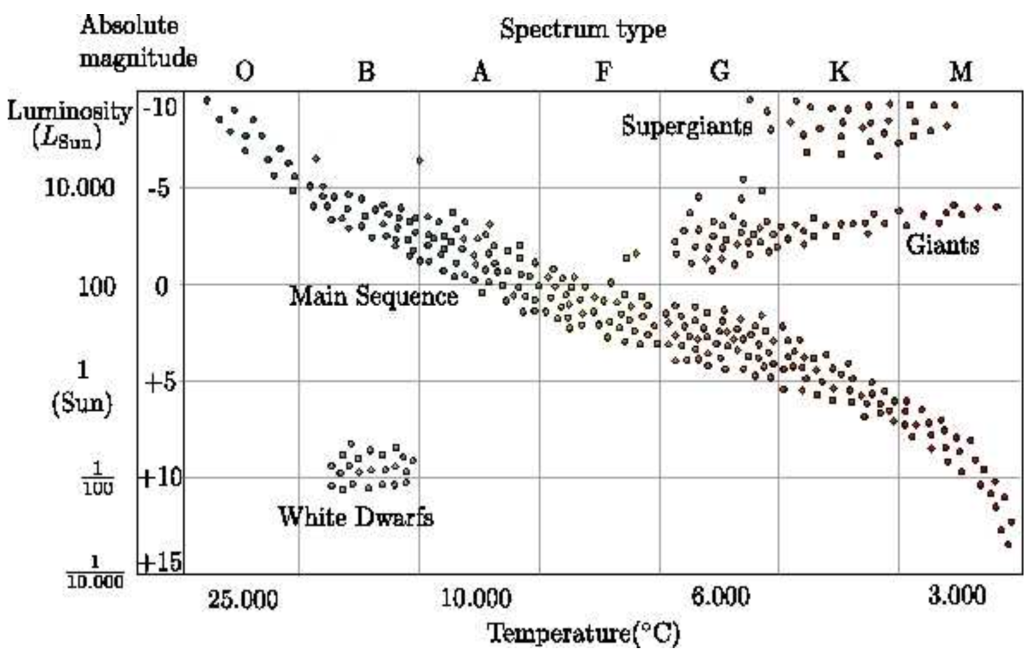
- **Oppgave:** Forklar hvordan du ville ha skrevet en kode for å finne eksentrisiteten til planetbanen ved å bruke disse dataene. Du trenger ikke å skrive koden, det eneste du trenger er
  - å forklare fremgangsmåten og ideen med ord
  - å forklare hvilke variable, arrays, funksjoner og FOR-løkker du ville hatt med i koden
  - å forklare med ord hva som skal skje med variablene/arrayene **på innsiden** av denne/disse FOR-løkken(e) og om du evt. har noen IF-tester.

Ingen flere detaljer i koden er nødvendig, du blir kun vurdert på disse 3 punktene og at du klarer å besvare disse med ord/forståelse istedenfor kodelinjer. Bruk maksimalt *omkring* 1 side (men ok med mer hvis du skriver stort) på hele oppgaven (bruk gjerne mindre så lenge du får frem de viktigste poengene)

Oppgave 2.2

- **Bakgrunnsinformasjon:** I figur 2 ser vi et generelt HR-diagram. Anta at du ser en stjerne på himmelen som såvidt er synlig for øyet uten kikkert. Stjerna lyser med et gulhvitt lys (til sammenlikning kan vi si at sola lyser med et mer gult lys med lengere bølgelengde).

Figur 2: Til oppgave 2.2



- **Oppgave: Bruk HR-diagrammet** (bruk gjerne også informasjon fra tabellen med konstanter og tall bak) til å gi et grovt anslag på avstanden til stjerna, bruke gjerne noen grove antakelser underveis (forklar hvordan du tenker!). Angi svaret i lysår

Oppgave 2.3

- **Antakelser:** I en supernovaeksplosjon trekker kjernen til stjerna seg sammen. Anta at sammentrekningen har stoppet midlertidig opp når kjernen har en radius på 75km. Nå starter sammentrekningen på nytt og vi antar at hele kjernen faller sammen til et sort hull. Anta at overflaten til kjernen er i fritt fall.

- **Oppgave:** Vis at hastigheten (målt fra en observatør i ro langt vekk fra sentrum av stjerna) til denne overflaten som funksjon av avstand r fra sentrum er gitt ved:

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)\left(1 - \frac{2M_0}{r_0}\right)^{-1}}$$

  Her er M_0 massen til kjernen og $r_0 = 75km$. Uttrykket er oppgitt i relativistiske enheter, og **du skal regne konsekvent med relativistiske enheter** i denne oppgaven.

- **Et lite tilleggsspørsmål:** Hva er hastigheten til denne overflaten i det den er i ferd med å passere eventhorisonten?

- **Hint 1:** Se på et punkt på overflaten som et lite masseelement i fritt fall radielt inn mot sentrum.

- **Hint 2:** Schwarzschild linje-elementet sier noe om forflytningen dr per tid dt i tyngdefeltet. Det sier også noe om tidsintervallet målt på en klokke som sitter fast på den fallende overflaten.

- **Hint 3:** Det finnes en bevart størrelse som kan hjelpe deg å bli kvitt en uønsket variabel. Du trenger å vite verdien til denne bevarte størrelsen i startpunktet (når sammentrekningen starter), da kan det være lurt å uttrykke dette ved hjelp av skall-tid og dermed skall-hastigheten som du kjenner i utgangsposisjonen.

Oppgave 2.4

- **Oppgave:** Fortsettelse av foregående oppgave: Hvilken hastighet v_{shell} vil en observatør som står i ro rett på utsiden av eventhorisonten observere at overflaten på kjernen har i det den passerer observatøren? Angi svaret som et tallsvar i relativistiske enheter.

- **Hint:** Her må du transformere uttrykket for hastigheten i forrige oppgave over til et annet referansesystem.

Oppgave 2.5

- **Bakgrunn:** En observatør, Bob, reiser med et romskip som kjører med 99% av lysets hastighet i forhold til jorda. Han reiser i rett linje mot jorda, men på veien passerer han rett ved planeten Faraway som ligger 200 lysår unna. I denne oppgaven skal du se helt bortifra gravitasjon og generell relativitetsteori. Du skal kun bruke spesiell relativitetsteori. Jorda og Faraway har ingen hastighet i forhold til hverandre og er dermed i samme referansessystem. I det Bob basserer Faraway, sender han et radiosignal til beboerne på Faraway og sier at han nå feirer 30-årsdagen sin. I jordas referansesystem feierer Alice sin 30-årsdag på jorda samme dag som Bob passerer Faraway.

- **Paradoks:** Sett fra jordas referansesystem beveger Bob seg med nær lyshastighet og pga. av tidsdilatasjone vet vi at **Bob dermed eldes saktere enn Alice.** Helt tilsvarende er det fra Bob sitt referansesyste: Bob står stille, men Alice beveger seg med hastighet nær lyshastigheten. Pga. tidsdilatasjon vet vi dermed at **Alice eldes saktere enn Bob.**

- **Oppgave:** I det Bob passerer Alice, vil Bob se at Alice er yngre eller eldre enn seg selv? Eller er de like gamle? Finn svaret uten regning og begrunn hvorfor det tilsynelatende paradokset ikke egentlig er et paradoks i dette tilfellet og hvordan både Alice og Bob får konsistente resultater og er enige om hva de kommer til å se når de treffes. (du får kun poeng på begrunnelsen, ikke på om svaret er riktig)

- **Hint:** For å løse oppgaven trenger du å kjenne hvordan tidsdilatasjon virker og **du trenger å bruke all informasjonen du har fått i oppgaven, dvs. tenke gjennom hva du vet helt sikkert skjer og hva du ikke vet**, men du skal ikke regne, kun resonnere med ord. **Det er ikke forventet noen form for tallsvar.**

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) $= 1.60 \times 10^{-19}$ J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU $= 1.5 \times 10^{11}$ m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly $= 9.47 \times 10^{15}$ m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$ $\qquad I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dAdtd\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$ $\qquad F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$ $\qquad v = H_0 d_p$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$ $\qquad m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$

$M_V = -2.81\log_{10}P_d - 1.43$ $\qquad \lambda_{\max}T = 0.0029\ m\ K$

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ $\qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$ $\qquad V_\mu = \gamma(1,\vec{v})$ $\qquad m^2 = E^2 - p^2$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$< E_K >= \frac{3}{2}kT$ $\qquad N = \frac{M}{\mu m_H}$ $\qquad M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$ $\qquad P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$ $\qquad P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$ $\qquad < K >= -\frac{1}{2} < U >$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$ $\qquad \frac{M_{\text{m}}}{M_{\text{kg}}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\text{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$ $\qquad \Delta r_{\text{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$ $\qquad \frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$ $\qquad \Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$ $\qquad V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$V_{\text{eff}}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$ $\qquad \Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$ $\qquad b = \frac{L}{p}$

$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ $\qquad b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$

kjernereaksjoner:

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$ $\qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$

$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp}X_H^2\rho T_6^4$ $\qquad \varepsilon_{0,pp} = 1.08\times 10^{-12}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$

$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO}X_H X_{CNO}\rho T_6^{20}$ $\qquad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24\times 10^{-31}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$

$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$ $\qquad \varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86\times 10^{-18}\text{Wm}^6/\text{kg}^3$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$L \propto M^4$

$t \propto 1/M^3$

$M \propto T_{\text{eff}}^2$

$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$

$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$

$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$

$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n_e^{4/3}$

$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$

$R_{\text{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3}M^{-1/3}$

$M_{\text{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$