FASIT AVSLUTTENDE EKSAMEN 2008
AST 1100

1

1.1

a) I et system med mange partikler så vil <u>ikke</u> den totale massen til systemet være lik summen av massen til hver av partiklene (fra relativitetsteorien). I en fusjonsprosess, når to kjerner smelter sammen til en større, så ~~vil~~ kan massen til den større kjernen være større eller mindre enn ~~de~~ summen av massene til de to kjernene som smeltet sammen. For fusjoner hvor resultatet er jern eller et grunnstoff som er lettere enn jern så vil denne kjernen vanligvis ha mindre masse enn de to som fusjonerte. Resten blir sendt ut som energi. Fusjonsprosesser som ender i tyngdre grunnstoffer enn jern må ha tilført energi siden resultatet er en kjerne som er tyngre. Disse prosessene vil derfor være vanskelige å få til.

b) Når kjernen hovedsakelig består av jern, så vil det ikke kunne genereres energi fra fusjon og tyngdekreftene vinner over trykk-kreftene

Kjernen begynner derfor å trekke seg sammen. (2)
For stjerner som er så tunge at de eksploderer som supernova så er ikke elektrondegenerasjonstrykket stort nok til å motvirke tyngdekreftene. Siden alle energinivåene til elektronene er brukt opp, kan de ikke presses videre sammen.
Følgende reaksjon vil da skje: $p^+ + e^- \rightarrow n$
Vi får dannet nøytroner av protonene og elektronene. Til slutt blir gassen som etterhvert består hovedsakelig av nøytroner bli nøytrondegenerert. Degenerasjonstrykket vil nå motvirke tyngdekreftene og bremse sammenfallet av kjernen kraftig. Den plutselige oppbremsingen skaper en sjokkbølge som kaster resten av stjerna ut fra kjernen i det som kalles en supernovaeksplosjon. Energien kommer fra potensiell gravitasjonsenergi fra sammenfallet av kjernen.

12) Vi ser at spektrallinjen har flyttet seg ca. 2 nm pga. Dopplereffekten til de ekspanderende skallet. Skallet beveger seg derfor utover med en hastighet:

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c \approx \frac{2\,\text{nm}}{656\,\text{nm}} \cdot c \approx \underline{\underline{914\ \text{km/s}}}$$

13) Den totale fluksen på overflaten til et sort legeme er gitt ved Stefan-Boltzmanns lov

$$F = \sigma T^4$$ der T er temp. til legemet.

Fluks er energi per tid per areal. For å få luminositet (energi/tid) må vi multiplisere med overflaten til legemet. Hvis radien til kuleskallet er R, så er luminositeten

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Fluksen som vi observerer på en avstand r er dermed

$$F_{obs} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \underline{\underline{\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4}}$$

siden energien da er fordelt utover et areal $4\pi r^2$.

Vi skal se på den tilsynelatende magnituden til stjerna før og etter eksplosjonen. Vi kaller radien til stjerna/kuleskallet før og etter for $R_{før}$ og R_{etter}. Vi har oppgitt at temp. T er konstant og avstanden r til oss er selvfølgelig også den samme. Vi har da

$\cancel{m_{før} - m_{e} = -2{,}5 \lg}$

$$m_{før} - m_{etter} = -2{,}5 \lg \frac{\left(\frac{R_{før}}{r}\right)^2 \sigma T^4}{\left(\frac{R_{etter}}{r}\right)^2 \sigma T^4}$$

som gir

$$m_{før} - m_{etter} = -2{,}5 \lg \left(\frac{R_{før}}{R_{etter}}\right)^2 = -5 \lg \frac{R_{før}}{R_{etter}}$$

Vi har oppgitt at $m_{før} = 8$ og $R_{før} = 100 R_\odot$
Kuleskallet ekspanderer med hastighet v og har derfor ved tid t: $R_{etter} = 100 R_\odot + v t$

Altså $m(1\,dag) = 8 + 5 \lg \frac{100 R_\odot}{100 R_\odot + v \cdot (1\,dag)} \approx \underline{\underline{6{,}4}}$

Supernovaen har enda ikke blitt synlig uten kikkert siden magnituden da må være mindre enn 6.

1.4) Hydrostatlikningen

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g$$

hvor P er trykk, r er avstand fra kjernen, ρ er tetthet og g er tyngdeakselrasjon.

Ved konstant tetthet har vi $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Tyngdeakselrasjonen i avstand r fra sentrum er $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$

hvor $M(r)$ er massen innenfor radius r: $M(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 M$

1.4) Dermed har vi $g = \frac{GMr}{R^3}$

Hydrostatlikningen

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{GMr}{R^3}$$

$$\Rightarrow \int_P^0 dP = -\frac{GM^2}{\frac{4}{3}\pi R^6} \int_0^R r\,dr = -\frac{GM^2}{\frac{8}{3}\pi R^4}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

En nøytronstjerne er nøytron-degenerert og holdes oppe av nøytrondegenerasjonstrykket. I formelsamlingen har vi uttrykket for deg. trykket til en degenerert elektrongass. Vi må derfor bytte ut elektronmassen med nøytronmassen og elektrontettheten med nøytrontettheten:

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20 m_n} n_n^{5/3} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

En nøytronstjerne består nesten bare av nøytroner. Antalltettheten er dermed massetettheten delt på nøytronmassen

$$n_n = \frac{\rho}{m_n}$$

1.4) Vi får da

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_n}\cdot\frac{\rho^{5/3}}{m_n^{5/3}} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_n^{8/3}}\frac{M^{5/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{5/3}R^5} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_n^{8/3}G}\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-2/3}\cdot 2M^{-1/3}$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{10m_n^{8/3}G}M^{-1/3}}}$$

2.1 a) event A: $x = vt_A,\ t = t_A,\ x' = 0,\ t' = t'_A$

event B: $x = v(t_A + \Delta t),\ t = t_A + \Delta t,\ x' = 0,\ t' = t'_A + \Delta t'$

b) $$\Delta S_{AB}^2 = \Delta t_{AB}^2 - \Delta x_{AB}^2 = \Delta t^2 - v^2\Delta t^2$$

$$\Delta S'^2_{AB} = \Delta t'^2_{AB} - \Delta x'^2_{AB} = \Delta t'^2$$

$$\Delta S_{AB}^2 = \Delta S'^2_{AB} \Rightarrow \Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = \Delta t'^2$$

Bruker nå $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{1+v} \Rightarrow \frac{\Delta t_0^2}{(1+v)^2} - v^2\frac{\Delta t_0^2}{(1+v)^2} = \Delta t'^2$

$$\Delta t_0^2(1-v^2) = \Delta t'^2(1+v)^2$$

$$\Delta t_0^2(1-v)(1+v) = \Delta t'^2(1+v)^2$$

$$\Delta t_0^2(1-v) = \Delta t'^2(1+v)$$

$$v = \frac{\Delta t_0^2 - \Delta t'^2}{\Delta t_0^2 + \Delta t'^2}$$

7

2.1

c) $\Delta t_0 = \frac{1}{30}\,s \;,\; \Delta t' = \frac{1}{100}\,s \quad \Rightarrow v = \frac{\Delta t_0^2 - \Delta t'^2}{\Delta t_0^2 + \Delta t'^2} \approx 0{,}8$

~~$\Rightarrow v = 1 - \left(\frac{30}{100}\right)^2 = 0{,}91$ (ganger lyshast.)~~

2.2

Vi må bruke GR hvis avstanden fra sentrum i tyngdefeltet er slik at følgende IKKE er oppfylt:

$$R \gg 2M$$

(her er $G = c = 1$)

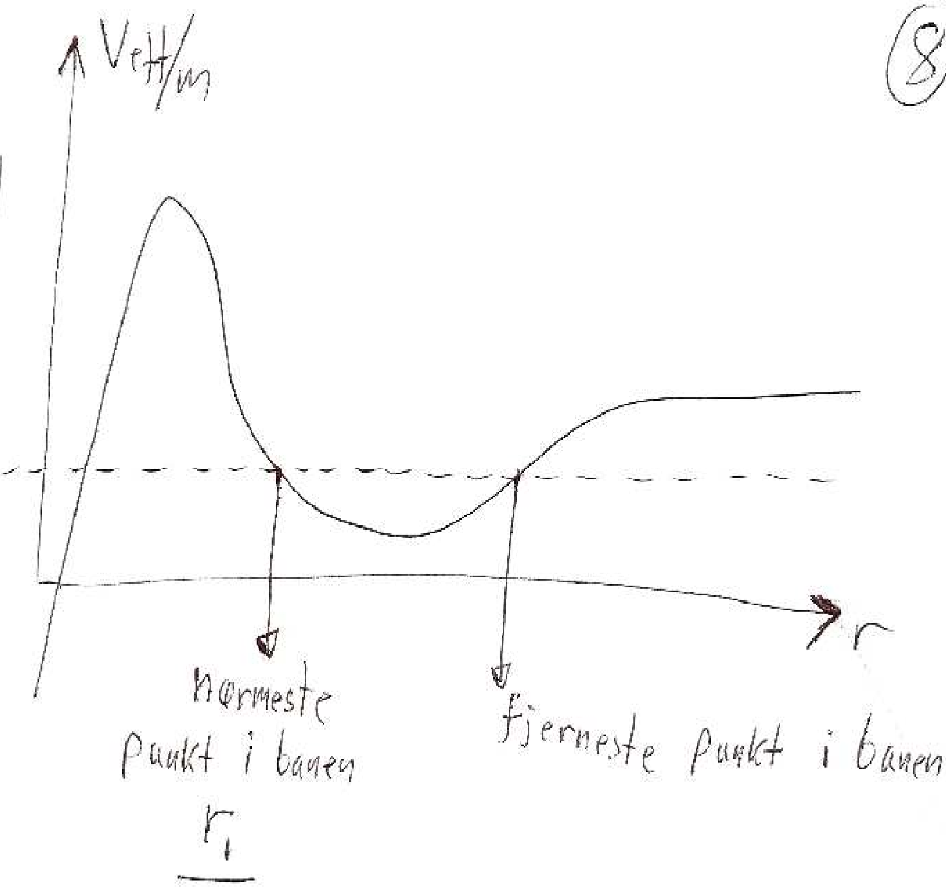
Regner om massen til m:

$$M(m) = M(kg) \cdot \frac{G}{c^2}$$

$$= 2 \cdot 10^{30} kg \cdot 3 \cdot \frac{G}{c^2} \approx \underline{4{,}4\,km}$$

4,4km er en del mindre enn 500km, men her bør vi likevel regne relativistisk for å være sikre.

2.3 Potensial



Ved det nærmeste punkt i banen så er totalenergien til sonden lik det eff. pot:

$$V_{eff}(r_1) = E$$

Vi har: $$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{V_{eff}}{m} = \sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

og $$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$\frac{E}{m}$ og $\frac{L}{m}$ er konstante og vi kan (9)
beregne de på et hvilket som helst punkt i banen. Siden vi er interessert i hastigheten v_0 ved punktet r_0, så velger vi r_0:

$$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau} = \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{dt_{shell}}\cdot\frac{dt_{shell}}{d\tau} = \sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}\,\gamma_0$$

Forhold mellom langt-vekk-tid og skall-tid: $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\Delta t_{shell}$

skall-obs. kan bruke SR for LOKALE (tid og rom) målinger $\Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \gamma$

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = r^2\underbrace{\frac{d\varphi}{dt_{shell}}}_{\dot\varphi}\cdot\underbrace{\frac{dt_{shell}}{d\tau}}_{\gamma_0} = r\cdot(r\dot\varphi)\gamma_0$$
$$= \underline{r v_\varphi \gamma_0}$$

Her er v_φ den tangensielle hastighet ved r_0:

$$v_\varphi = v_0 \sin\theta \quad \text{(fra figur)}$$

Da har vi: $V_{eff}(r_1)^2 = E^2$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{2M}{r_1}\right)\left[1+\frac{r_0^2}{r_1^2}v_0^2\sin^2\theta_0\,\gamma_0^2\right]$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\gamma_0^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} v_0^2 \sin^2\theta_0 \left(\frac{1}{1-v_0^2}\right) = \frac{\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)} \frac{1}{1-v_0^2}$$

$$\times(1-v_0^2) \Rightarrow \quad 1 \underbrace{- v_0^2 + \frac{r_0^2}{r_1^2} v_0^2 \sin^2\theta_0}_{v_0^2\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}\sin^2\theta_0 - 1\right)} = \frac{\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)}{1-\frac{2M}{r_1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{r_0^2}{r_1^2}\sin^2\theta_0 - 1}\left[\frac{\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)}{1-\frac{2M}{r_1}} - 1\right]}}}$$

<u>2.4</u>

Setter $r_0 = 15 \cdot 10^6\,m$

$r_1 = 5 \cdot 10^5\,m$

$M = 4400\,m$

$\theta = 3°$

~~$v_0 = 0{,}03\ (\times c)$~~

$\underline{\underline{v_0 \approx 0{,}1\ (\times c)}}$