FASIT PÅ AVSLUTTENDE EKSAMEN AST1100 HØST 2010

---

1) VI SER AT KJERNEN STORT SETT BESTÅR AV KARBON OG OKSYGEN. DET VIL SI AT FASEN HVOR STJERNA FUSJONERER HELIUM I KJERNEN ER OVER. HELIUMFUSJON I KJERNEN SKJER PÅ HORISONTALGRENEN I HR-DIAGR. (DER HVOR STJERNE B ER), NÅR HELIUMFUSJON ER SLUTT BEVEGER DEN SEG OPP TIL DEN ASYMPTOTISKE GRENEN. STJERNEN VÅR MÅ DERFOR VÆRE STJERNE D I HR-DIAGR.

2) BETINGELSEN FOR AT ~~[illegible]~~ EN GASS ER DEGENERERT ER GITT VED (FORMELSAMLING)

$$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12 m_e k}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$$

ANTALL PROTONER ER OMTRENT LIK ANTALL ELEKTRONER

DERFOR HAR VI $n_p = n_e$

FORTS. 2

VI ANTAR AT DET ER OMTRENT LIKE MANGE NØYTRONER SOM PROTONER I GASSEN. HALVPARTEN AV MASSETETTHETEN ρ ER DERFOR I PROTONER (SER BORT FRA ELEKTRONENE). FOR Å GÅ FRA MASSETETTHET TIL ANTALLTETTHET MÅ VI DELE PÅ MASSEN TIL HVER PARTIKKEL:

$$n_e = n_p = \frac{\frac{1}{2}\rho}{m_p}$$

DERFOR HAR VI: $$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \underbrace{\frac{1}{(2m_p)^{2/3}} \frac{h^2}{12 m_e k} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}}_{= 1262 \frac{\mathrm{K\,m}^{2/3}}{\mathrm{kg}^{2/3}}}$$

Sjekker om $\frac{T}{\rho^{2/3}} < 1262$

$r = 0 - 0{,}0008R$: $400 < 1262$ DEGENERERT

$r = 0{,}0008R - 0{,}001R$: $3000 > 1260$ IKKE DEG.

$r = 0{,}001R - 0{,}003R$: $500 < 1262$ DEGENERERT

$r = 0{,}003R - 0{,}006R$: $100\,000 > 1262$ IKKE DEG

3) SKALL-FLASHET KOMMER I SONEN $\underline{r = 0{,}0010R - 0{,}003R}$.
DETTE SKALLET ER DEGENERERT OG BESTÅR HOVEDSAKELIG AV He, MEN TEMP. ER IKKE HØY NOK TIL HELIUMFUSJON. I SKALLET OVER FUSJONERER HYDROGEN TIL HELIUM OG VARM HELIUMASKE FALLER NED PÅ DET DEGENERERTE SKALLET OG VARMER DET OPP. AT SKALLET ER DEGENERERT BETYR AT TEMP. FORSKJELLER BLIR RASKT UTJEVNET SLIK AT NÅR SKALLET NÅR EN TEMPERATUR SOM ER HØY NOK TIL HELIUM FUSJON SÅ FÅR HELE SKALLET DENNE TEMPERATUREN SAMTIDIG. DERMED BEGYNNER HELIUMFUSJON I HELE SKALLET SAMTIDIG NOE SOM UTLØSER STORE MENGDER ENERGI PÅ KORT TID OG DE YTRE LAGENE AV STJERNEN BLIR KASTET VEKK FRA STJERNA.

4) VI VET AT 3-α-PROSESSEN FOR HELIUMFUSJON GÅR SOM (FORMELSAMLING) $\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$
MENS HYDROGENFUSJON GJENNOM CNO-SYKLUSEN GÅR SOM T_6^{20}. HVIS TEMP $T_8 > 1$ SÅ VIL ENERGIMENGDENE FRA 3-α VÆRE MYE STØRRE ENN FRA CNO SIDEN DEN GÅR I 41. POTENS MOT 20. POTENS FOR CNO

4 FORTS

SER DERFOR KUN PÅ SKALLET MED HELIUMFUSJON $T_8 > 1$ dvs. $r = 0{,}0008R - 0{,}001R$

$\varepsilon_{3\alpha}$ GIR OSS ENERGI PRODUSERT PER kg AV GASSEN PER TID. MASSEN TIL GASSEN ER GITT VED VOLUM × TETTHET. VI HAR DA:

$$L = \varepsilon_{3\alpha} \cdot V \cdot \rho = \varepsilon_{3\alpha} \frac{4}{3} \pi R^3 (0{,}001^3 - 0{,}0008^3) \rho$$

SETTER INN: $\rho = 10^7\,kg/m^3$, $T_8 \approx 1{,}4$, $X_{He} \approx 0{,}95$

$$\Rightarrow L \approx \underline{\underline{48\,000 L_\odot}}$$

5) $m - m_\odot = -2{,}5 \lg \frac{F}{F_\odot}$

FLUKS VI MOTTAR FRA EN STJERNE ER

$F = \frac{L}{4\pi r^2}$ HVOR r = AVSTAND

$$m = m_\odot - 2{,}5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi r^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi (1AU)^2}} = m_\odot - 2{,}5 \lg \left[48\,000 \cdot \frac{(1AU)^2}{(3000ly)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{m \approx 3}}$$

6) VI KAN REGNE IKKE-REL. NÅR $\underline{\frac{2M}{R} \ll 1}$

MASSEN TIL KJERNEN ER $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

HVOR $r = 0{,}0008 \cdot 20R_\odot$ OG $\rho = 10^9\ \mathrm{kg/m^3}$

REGNER OM FRA kg TIL m:

$$M_0 = \frac{G}{c^2} \cdot \frac{4}{3}\pi(0{,}0008 \cdot 20R_\odot)^3 \cdot 10^9\ \mathrm{kg/m^3} \approx \underline{4360\ \mathrm{m}}$$

HAR DERFOR $\underline{\frac{2M_0}{R} \approx 0{,}1}$ SOM IKKE ER MYE MINDRE ENN 1.

7) SIDEN $d\tau = ds$ DER $d\tau$ ER ET EGENTIDSINTERVALL PÅ KLOKKEN SOM STÅR FAST PÅ DET INNFALLENDE SKALLET, HAR VI FRA SCHWARZSCHILD-LINJEELEMENTET:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M_0}{r}} - \cancel{r^2 d\varphi^2}$$

KUN RADIELL BEVEGELSE.

VI HAR AT TOTAL ENERGI I TYNGDEFELTET ER

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \quad \text{SOM ER BEVART}$$

7. FORTS

$$\Rightarrow d\tau = \left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\left(\frac{E}{m}\right)^{-1} dt$$

INSATT I SS-LINJEELEMENTET (VI ELIMINERER τ):

$$\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)^2\left(\frac{E}{m}\right)^{-2} dt^2 = \left(1-\frac{2M_0}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M_0}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\left(\frac{E}{m}\right)^{-2}}$$

VI MÅ FINNE E/m:

$$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\frac{dt}{dt_{sh}}\cdot\frac{dt_{sh}}{d\tau}$$

VET AT $\frac{dt}{dt_{sh}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M_0}{r}}}$ OG AT $\frac{dt_{sh}}{d\tau} = \gamma_{sh} = \frac{1}{\sqrt{1-V_{sh}^2}}$

LOKALT INERTIALSYSTEM OG LOKALE EVENTER

SIDEN KJERNEN STÅR I RO I UTGANGSPUNKTET HAR VI $V_{sh} = 0$

DERMED $\frac{E}{m} = \sqrt{1-\frac{2M_0}{r_0}}$ TATT I STARTEN

NÅR $\underline{r_0 = 75\,km}$

NÅR $r \to 2M_0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} \to 0$

DVS. AT SAMMENTREKNINGEN STOPPER OPP VED $r=2M_0$ OG VIL ALDRI PASSERE $r=2M_0$

8) TRENGER SKALL-HAST.

$$\frac{dr_{sh}}{dt_{sh}} = \frac{\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2M_0}{r}}}}{\sqrt{1-\frac{2M_0}{r}}\,dt} = \frac{1}{1-\frac{2M_0}{r}}\frac{dr}{dt} = -\sqrt{1-\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\left(1-\frac{2M_0}{r_0}\right)^{-1}}$$

FOR $r \rightarrow 2M_0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -1$

OVERFLATEN NÅR LYSHASTIGHETEN VED EVENTHORISONTEN!

9) VI DELER OPP STREKNINGEN FRA $r = 75$ Km TIL $r = 2M_0$ i N like store intervaller Δr. FOR HVERT INTERVALL Δr, BEREGNER VI TIDEN Δt DET TAR Å FALLE DETTE INTERVALLET OG TIL SLUTT SUMMER VI OPP

$T = 0$ (TOTAL TID)

$r = 75$ km (STARTPOSISJON)

$R_S = 2M_0$ (SLUTTPOSISJON)

$\Delta r = \frac{r - R_S}{N}$ (INTERVALLET)

FOR $i = 0, N$

$$\Delta t = \cancel{\frac{\Delta r}{\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\left(1-\frac{2M_0}{r_0}\right)^{-1}}}} = \frac{\Delta r}{\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M_0}{r}\right)\left(1-\frac{2M_0}{r_0}\right)^{-1}}}$$

9. FORTS.

$T = T + \Delta t$

$r = r - \Delta r$

END.

TOTAL TID $= T$

UTTRYKKET FOR Δt TOK VI FRA TIDLIGERE OPPGAVE SOM GA OSS $\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{dr}{dt}$.

10) RØDFORSKYVNING: $\Delta\lambda = 3936\,nm - 656\,nm = \underline{3280\,nm}$

$$Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \underline{\underline{5}}$$

FRA FORMELSAMLING: $Z = \frac{R_0}{R(t)} - 1 \Rightarrow \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{6}$

DVS. UNIVERSETS "STØRRELSE" $R(t)$ VAR $\frac{1}{6}$ AV UNIVERSETS STØRRELSE I DAG.

BRUKER ANNEN FORMEL FRA FORMELSAMLING:

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$ (BRUKER $w = 0$ SIDEN VI HAR STØV $p = 0$)

DENNE ER GYLDIG FOR FLATT UNIVERS $k = 0$

$$\Rightarrow t = t_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2} = 13.6\text{ mrd år} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3/2} \approx \underline{\underline{1\text{ mrd år}}}$$

11) HYDROSTATISK LIKEVEKT BETYR AT
TYNGDEKREFTENE NEDOVER OPPVEIES AV
GASSTRYKK-KREFTENE OPPOVER SLIK AT ETHVERT
SKALL I STJERNA HOLDER SEG I RO.
GASSTRYKKET VIRKER MED KREFTER BÅDE UTOVER
OG INNOVER. FOR Å FÅ EN KRAFT SOM
MOTVIRKER TYNGDEKRAFTEN SÅ MÅ DERMED
GASSTRYKKET UNDENFRA VÆRE STØRRE ENN GASS-
TRYKKET OVENFRA. DERMED MÅ TRYKKET AVTA
UT FRA SENTRUM. FOR IDEEL GASS SÅ
ER TRYKKET P ρT OG FOR DEG. GASS
$P \sim \rho^{5/3}$. I BEGGE TILFELLER VIL TETTHET
OG TEMP SOM ER KONSTANT MED r
FØRE TIL ET TRYKK SOM HELLER IKKE
VARIERER MED r. DERMED VIL VI IKKE
HA HYDROSTATISK LIKEVEKT. VI SER FRA
FIGURENE AT DET ER AKKURAT DETTE
SOM SKJER I VÅR STJERNE: T OG ρ
VARIERER IKKE MED r I NOEN SONER.
DERMED HAR VI IKKE HYDROSTATISK LIKEVEKT.