① FASIT EKSAMEN AST1100, H2015

1) spiralgalakse → A

Her ser vi hele hovedserien, både store og små stjerner, samt kjemper og hvite dverger

elliptisk galakse → C

· Det fødes ikke nye stjerner derfor ser vi ikke de massive stjernene på hovedserien (disse dør først og siden det ikke kommer nye stjerner til så er det ingen igjen)

2) Antar jevn tetthet: $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Volum av kule med radius r: $\frac{4}{3}\pi r^3$

$M(r)$ = Masse = volum · tetthet = $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$

3) Lysstrålen går radielt inn mot sentrum så vi ser kun på den radielle delen av bevegelseslikningen. Formelsamlingen gir oss:

$$\Delta r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\;\Delta t$$

Siden det kun er radiell bevegelse så er $L=0$. Gjør også om $\Delta \to d$ for små intervall

(2) Forts. oppg. 3

$$dr = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt \Rightarrow dt = -\frac{dr}{1-\frac{2M}{r}}$$

Har valgt minustegn siden bevegelsen er MOT sentrum.

Integrerer fra kanten $r=R$, $t=0$ til sentrum $r=0$, $t=T$:

$$T = -\int_R^0 \frac{dr}{1-\frac{2M(r)}{r}} = \int_0^R \frac{dr}{1-\frac{2M(r)}{r}}$$

Nå må vi huske at massen varierer som funksjon av r: $M(r) = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \int_0^R \frac{dr}{1-\frac{2M}{R^3}r^2}}}$$

4) $M = 10^{15} M_\odot$ $\quad M_\odot = 2\cdot10^{30}\,kg = 2\cdot10^{30}\cdot\frac{G}{c^2}\,m = \underline{1{,}5\,km}$

$$R = 3\,Mpc = 3\cdot 3{,}26\cdot\underbrace{3\cdot10^8}_{c}\cdot\underbrace{3600\cdot24\cdot365}_{yr}\cdot\underbrace{10^6}_{Mpc}\,m = 9{,}3\cdot10^{22}\,m$$

$$\frac{M}{R} = \frac{1{,}5\cdot10^3\cdot10^{15}}{9{,}3\cdot10^{22}} = \underline{\underline{1{,}6\cdot10^{-20}\cdot10^{15}}} = \underline{\underline{1{,}6\cdot10^{-5}}}$$

5) Hvis $\frac{M}{R} \ll 1$ så er også $\frac{2M}{R^3}r^2 = \underline{2\frac{M}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ll 1}$

Definerer $x = \frac{2M}{R^3}r^2$ og rekkeutvikler

③

Forts. oppg. 5

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f'(x) = 1 \Rightarrow \underline{f(x)_{x \ll 1} \approx 1 + x}$$

$$T \approx \int_0^R \left(1 + \frac{2M}{R^3} r^2\right) dr = R + \frac{2M}{R^3}\frac{1}{3}R^3 = \frac{T_0}{2} + \frac{2M}{3}$$

$\frac{T_0}{2}$

tidsforsinkelse fra $r=R$ til $r=0$

Hele tidsforsinkelsen blir da dobbelt så stor

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{2M}{3} = \underline{\underline{\frac{4M}{3}}}$$

6) Vet at hastighetene er gitt ved Maxwell-Boltzmann:

$$n(v) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 = \text{antall part. per volum med hastighet } v$$

Topp-punktet til denne funksjonen gir oss altså den hastigheten som flest partikler har.

~~Vi samler alle konstanter i en konstant k~~

For å finne topp-punktet så setter vi den deriverte lik 0:

$$\frac{d\,n(v)}{dv} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dv}\left(n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi} \cdot \frac{d}{dv}\left[e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\right] = 0$$

4

Forts. oppg. 6

$$\frac{d}{dv}\left[e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\right] = 0$$

$$-\frac{\cancel{2}mv}{\cancel{2}kT}\cancel{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}} v^2 + 2v\cancel{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}} = 0$$

$$-\frac{mv^3}{kT} + 2v = 0 \Rightarrow v = \boxed{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

MERK FEIL I OPPGAVE SKAL HA $\sqrt{\ }$

Setter inn $M_{elektron}$ og $T = 10^8 K \Rightarrow \underline{v = 5{,}5 \cdot 10^7 m/s}$

7) Virialteoremet: $\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$

Fra formelsamlingen har vi at den midlere potensielle ~~kinetiske~~ energien til en kuleformet gass-sky med jevn tetthet er

$$\langle U \rangle = -\frac{3GM_{gass}^2}{5R} \quad \left(M_{gass} = \frac{M}{10}\right)$$

Vi vet videre at midlere kinetisk energi til elektronene og protonene i gassen er $\frac{3}{2}kT$. Vi trenger dermed kun å finne antall protoner/elektroner:

$$N_{elek} = N_{prot} = \frac{M_{gass}}{m_{prot} + M_{elek}} = \frac{M_{gass}}{m_p + m_e}$$

~~Virialteoremet:~~

Setter inn tall verdier:

$$\underline{\langle U \rangle = 1.7 \cdot 10^{55} J}$$

(5) Forts. oppg. 7

$$\langle K \rangle = \frac{2 M_{gass}}{m_p + m_e} \cdot kT = \underline{3{,}3 \cdot 10^{56}\ J}$$

Ser at $\langle K \rangle > -\frac{1}{2}\langle U \rangle$

Gass-skyen ville altså ha løst seg opp (alt. B) hvis det ikke hadde vært for tyngdefeltet til galaksene og den mørke materien.

8) Har at $\varepsilon_{pp} = \varepsilon_{pp,0} X_H^2 \rho T_6^4$

Vet at uttrykket er gyldig for lave T_6, må her anta at det er gyldig også for $\underline{T_6 = 100}$

Vi har kun hydrogenkjerner så $X_H = 1$

Tetthet: $\frac{M_{gass}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{6 \cdot 10^{-26}\ kg/m^3}$

$$\underline{\varepsilon_{pp} = 6{,}5 \cdot 10^{-30}\ W/kg}$$

Den lave tettheten gir altså en svært liten sannsynlighet for fusjonsreaksjoner. Men hvis vi antar at uttrykket faktisk er gyldig for så lave ρ og så høye T, så ser vi at vi i teorien ville fått produsert $\sim 10^{15}$ W fra hele hopen.

⑥

9)
```
L=0
for t=0,T
    ~~pos(i,:,0)~~
    pos = pos + vel·deltat
    for i=1,N
        for j=1,N
            dist1=norm[pos(i,:,0)-pos(j,:,1)]
            dist2=dist1
            if (i≠j) then dist2=norm[pos(i,:,0)-pos(j,:,0)]
            if (dist1<deltal) or (dist2<deltal) then
                velsqr=norm[vel(i,:,0)]^2
                L=L+1/2 m_elektron·[velsqr-1/4 velsqr]
                vel(i,:,0)=1/2 vel(i,:,0)
                exit loop j
            endif
        endfor j
    endfor i
endfor t
print "Luminositet:", L/T
```

(oppdaterer alle pos samtidig)

(finn avst. til alle andre part.)

(Hvis avst. <deltal så V=0,5V og kinetisk energi går over til L)

10) Bruker at midlere kinetisk energi for partikkel i gassen er $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mV_{mean}^2$

hvor V_{mean} er midlere hastighet $\Rightarrow T = \frac{V_{mean}^2 \cdot m}{3k}$

```
vmean=0
for i=1,N
vmean=vmean+norm[vel(i,:,0)]
endfor
T=m_elektron·(vmean/N)^2/3/k
```