FASIT AVSLUTTENDE EKSAMEN 2016 AST1100

1) a)

	A	B	C
jord	$x_A = 0$	$x_B = 0$	$x_C = v_1 t_C$
	$t_A = 0$	$t_B = 30d$	$t_C = ?$
-syst	$x'_A = 0$	$x'_B = -v_1 t'_B$	$x'_C = 0$
	$t'_A = 0$	$t'_B = ?$	$t'_C = ?$
2-syst	$x''_A = ?$	$x''_B = 0$	$x''_C = ?$
	$t''_A = ?$	$t''_B = 0$	$t''_C = 10d$

b) Avstanden vi skal finne er $|x''_C|$

Bruker ΔS_{BC} for lab-syst og romskip 2:

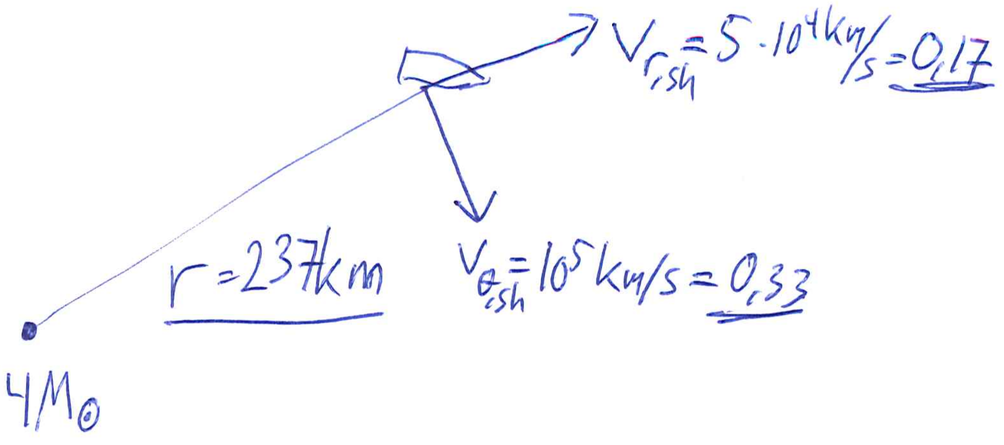
$$\Delta t_{BC}^2 - \Delta x_{BC}^2 = \Delta t''^2_{BC} - \Delta x''^2_{BC}$$

$$(30d - t_C)^2 - v_1^2 t_C^2 = 10d^2 - x''^2_C$$

$$\Rightarrow \quad |x''_C| = \sqrt{(10d)^2 + v_1^2 t_C^2 - (30d - t_C)^2}$$

her er $\underline{v_1 = 0{,}99}$

2) a)



$$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,\frac{dt_{sh}}{d\tau} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,\frac{1}{\sqrt{1-V_{sh}^2}}$$

formelsamling $dt = \dfrac{dt_{sh}}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{dt_{sh}}{d\tau} = \gamma$

lokalt inert. syst.: måles av skall-obs. v. romskipet
Klokka i romskipet går saktere sett fra skall obs.: $\underbrace{dt_{sh} = \gamma d\tau}_{\text{Spes. rel.}}$

Regner alt i km:

$M = 4M_\odot = 4\cdot2\cdot10^{30}\cdot\frac{G}{c^2} \approx \underline{5{,}9 km} \Rightarrow \frac{2M}{r} = \frac{11{,}8}{237} = \underline{0{,}05}$

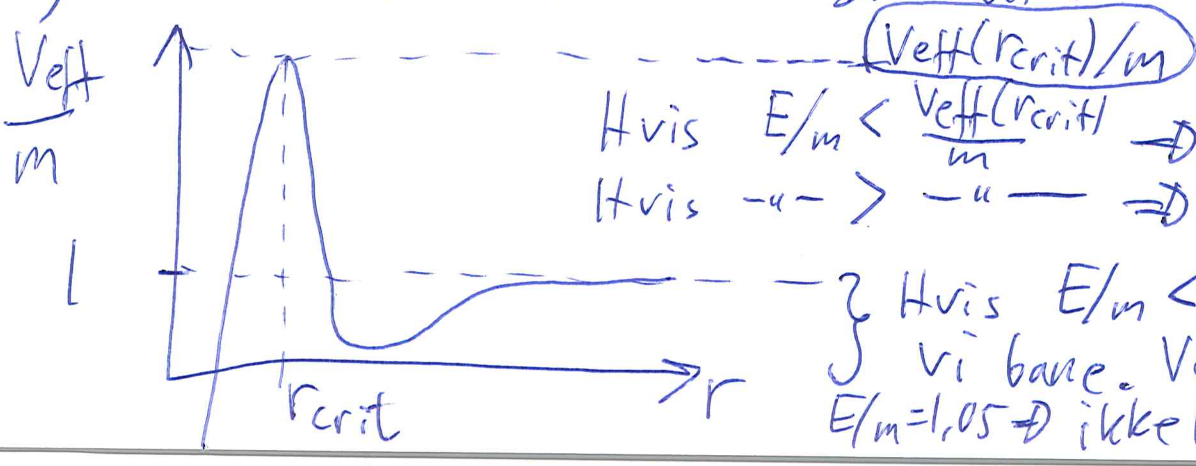
Hastighet: $V_{sh} = \sqrt{V_{\theta,sh}^2 + V_{r,sh}^2} = \sqrt{0{,}16^2+0{,}33^2} = \underline{0{,}37}$

Insatt får vi: $\frac{E}{m} = \sqrt{1-0{,}05}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-0{,}37^2}} = \underline{\underline{1{,}05}}$

Vet at $E=mc^2$ mangler derfor c^2 for å gjøre om til SI-enheter

$= 1{,}05c^2 = \underline{\underline{9{,}45\cdot10^{16}\,\frac{J}{kg}}}$

b) Vet at potensialet ser slik ut:



Hvis $E/m < \frac{V_{eff}(r_{crit})}{m} \Rightarrow$ unnslipper
Hvis $-''- > -''- \Rightarrow$ fanget!

Hvis $E/m < 1$ får vi bane. Vet at $E/m = 1{,}05 \Rightarrow$ ikke bane!

~~Må bere~~

2b forts) Må beregne $\frac{V_{eff}(r_{crit})}{m}$ og sammenlikne med $\frac{E}{m}$.

Fra formelarket ser vi at vi trenger L/m for å finne r_{crit}:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = r \frac{r\,d\varphi}{\frac{dt_{sh}}{\gamma}} = r\gamma \cdot \left(r\frac{d\varphi}{dt_{sh}}\right) = r\gamma v_{\theta,sh}$$

Bruker igjen at $dt_{sh} = \gamma d\tau$

tangensiell hast. målt av skallobs.

$$= 237\,\text{km} \frac{1}{\sqrt{1-0{,}37^2}} \cdot 0{,}33 = \underline{\underline{84\,\text{km}}}$$

Då får vi (fra formelsaml.)

$$r_{crit} = \frac{(84\,\text{km})^2}{2 \cdot 5{,}9\,\text{km}} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{12 \cdot (5{,}9\,\text{km})^2}{(84\,\text{km})^2}}\right] = \underline{\underline{18\,\text{km}}}$$

Innsatt for $\frac{V_{eff}}{m}$:

$$\frac{V_{eff}(r_{crit})}{m} = \cancel{\sqrt{\left(1-\ldots\right)\left(1+\frac{(84\,\text{km})^2}{\ldots}\right)}}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_{crit}}\right)\left(1 + \frac{(84\,\text{km})^2}{r_{crit}^2}\right)}$$

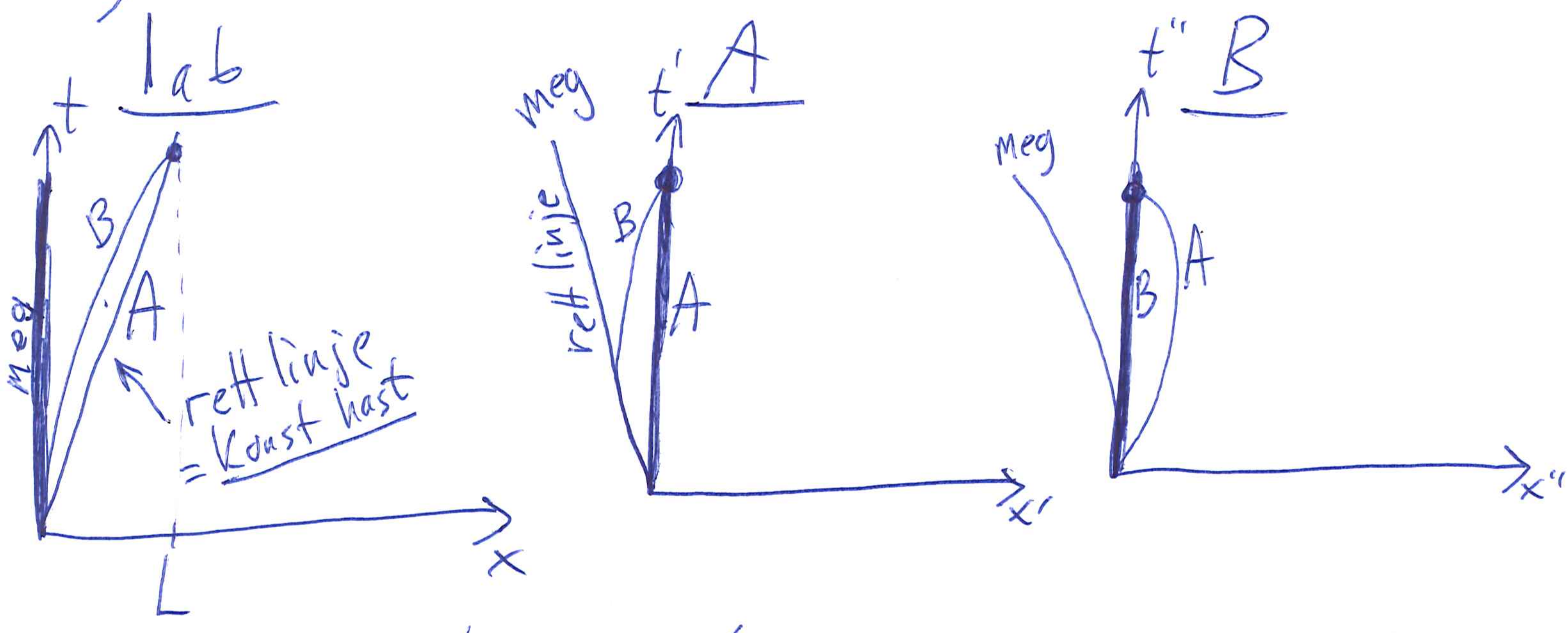
$$= \underline{\underline{2{,}8}}$$

$$\frac{E}{m} = \underline{1{,}05 < 2{,}8}$$

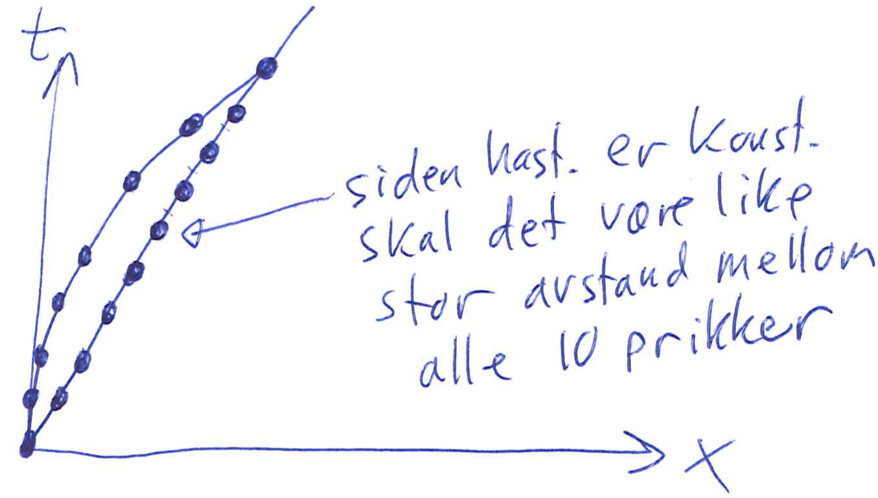
$\Downarrow$

<u>unnslipper!</u>

3a)



b)



- Maksimal aldrings-prins. sier at et objekt uten påvirkning av ytre krefter velger den veien i tidrommet som gir flest tikk. Bil A går med konst. hast som tilsvarer det som et objekt uten ytre krefter ville tatt ⇒ 10 tikk er derfor det maksimale. Sjåføren i bil B har derfor færre tikk.
- Sett fra lab-syst så vil klokka i bil B tikke saktere jo fortere den går. I begynnelsen går den sakte → liten helning → mange tikk. Etterhvert går det fortere → større helning → færre tikk

4a) Hydrostatisk likevekt: $\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)\, g(r)$

Hvis vi antar $P(r) = Ar^n$ (A = konst) så har vi

$$\frac{dP(r)}{dr} = Anr^{n-1} = An\frac{r^n}{r} = n\frac{Ar^n}{r} \propto \frac{P(r)}{r}$$

Ved overflaten av kjernen $r=R \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = \frac{P_c}{R}}$

Tetthet, hvis uniform er $\rho_c = \frac{M_c}{\frac{4}{3}\pi R_c^3} \propto \boxed{\frac{M_c}{R_c^3}}$

volum av kjernen

Tyngdeakselrasjon: $g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2}$

ved overflate av kjernen: $g(R_c) = -G\frac{M_c}{R_c^2} \propto \boxed{\frac{M_c}{R_c^2}}$

Setter inn i likn. for hydrostatisk likevekt

$$\frac{P_c}{R} \propto \frac{M_c}{R_c^3} \cdot \frac{M_c}{R_c^2} \Rightarrow \underline{\underline{P_c \propto \frac{M_c^2}{R_c^4}}}$$

b) Ideel-gasslikning: $P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$

Antar μ konstant i hele kjernen: $P_c \propto \rho T_c \propto \frac{M_c T_c}{R_c^3}$

$\Rightarrow$ ~~ρ_c~~ insatt i likn. fra a)

$$\frac{M_c}{R_c^3} T_c \propto \frac{M_c^2}{R_c^4} \Rightarrow \underline{\underline{T_c \propto \frac{M_c}{R_c}}}$$

4c) He-fusjon starter når energiprod. ~~per masse~~ har nådd solas luminositet. Dvs når energiprod per masse, ε, har nådd $\frac{L_\odot}{M_c}$. Fra formelarket har vi da:

$$\frac{L_\odot}{M_c} = \varepsilon_{0,3\alpha} \cdot \rho_x^2 \, X_{He}^3 \, T_8^{41}$$

$$\downarrow$$

100% He $\Rightarrow X_{He} = 1$

Her er ρ_x og T_8 tetthet og temperatur ved ingangsetting av He-fusjon.

Finner først massen M_c: $M_c = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_c^3 = 1{,}7 \cdot 10^5 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \times (0{,}2 R_\odot)^3$

$\approx \underline{\underline{M_\odot}}$

Vet at $\rho_x = \frac{M_c}{\frac{4}{3}\pi R_x^3}$

der R_x er radien ved He-fusjon som vi ønsker å finne.

Bruker nå uttrykket for T_c fra foregående oppgave:

$T_c = A \frac{M_c}{R_c}$ der A er en konstant. Bruker tallene vi får oppgitt for solas kjerne for å finne A: $\underline{A = 3{,}1 \cdot 10^{-15}}$

Dermed har vi ved He-fusjon: $T_8 = \frac{T}{10^8} = \underline{\frac{A M_c}{10^8 R_x}}$

Insatt i uttrykket over får vi:

$$\frac{L_\odot}{M_c} = \varepsilon_{0,3\alpha} \left(\frac{M_c}{\frac{4}{3}\pi R_x^3} \right)^2 \left(\frac{A M_c}{10^8 R_x} \right)^{41} \Rightarrow R_c = \left(\frac{\varepsilon_{0,3\alpha} M_c^{43} A^{41}}{(\frac{4}{3}\pi)^2 \cdot 10^{328} \cdot L_\odot} \right)^{1/47}$$

$$= \underline{\underline{8 \cdot 10^5 \, m}}$$

5) A: hovedseriestjerne, H → He i kjernen

B: horisontalgrenen. He → C, O i kjernen

H → He i skall

C: hvit dverg: ingen energiprod

Luminositet fra termisk energi

D: H → He og He → C, O i skall