FASIT AVSLUTTENDE EKSAMEN 2018 AST2000

1a) Laserstrålene ble sendt ut samtidig og må gå like langt i romskipsystemet, dermed kommer de også frem til M samtidig

1b) Siden hastigheten til begge laserstrålene er den samme (lyshast.) og lysstrålen fra A vil ha en lenger vei å gå for å nå frem til M (M beveger seg bort fra stråle A og mot stråle B), så ville M observert A før B hvis begge ble sendt ut samtidig. Siden A-strålen har lenger vei å gå, så må den bli sendt ut <u>før</u> B for å rekke frem til M samtidig med B-strålen.

2 a) p_μ = (total rel. energi, rel. bev.mengde i x-retning, rel. bev.mengde i y-retn, rel. bev.m. i z-r.)

- Siden fotonet går i x-retn så har det ingen hastighetskomp. og dermed ingen bevegelsemengde i y- og z-retn. Disse er derfor 0.
- Vi vet at total energi for fotonet er E, dermed er første element E.
- Fra formelsamling har vi følgende sammenheng mellom masse, energi og bev.mengde for en partikkel: $m^2 = E^2 - p^2$

  Fotoner er masseløse $m = 0 \Rightarrow \underline{E = p}$

Bevegelsemengden i x-retning er dermed lik E med positivt fortegn siden bevegelsen er i positiv x-retn. Dermed er 2. element også E

2b) 4-vektorer transformerer fra umerket til merket system via Lorentztransformasjonen. Ser her kun på de 2 første elementer:

$$p'_\mu \to \begin{pmatrix} E' \\ p'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{rel} & -v_{rel}\gamma_{rel} \\ -v_{rel}\gamma_{rel} & \gamma_{rel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \end{pmatrix} \gamma \; p_\mu$$

Her er v_{rel} den relative hastigheten til merket system i forhold til umerket. Umerket system er planeten og merket system er romskipA. Romskipet beveger seg med $\underline{v_{rel} = v}$ i forhold til planeten.

Siden fotonet går i negativ x-retning i begge systemer så er $p_x = -E$ og $p'_x = -E'$.

Da har vi $p_\mu = (E, -E, 0, 0)$ og $p'_\mu = (E', -E', 0, 0)$ for fotonet:

$$\begin{pmatrix} E' \\ -E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ -E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E' = \gamma E + \gamma v E = \underline{\underline{E\gamma(1+v)}}$$

Vi har $\gamma_{rel} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \underline{\underline{\gamma}}$

④

2c) Bølgelengde i romskipsystem $\lambda' = \frac{h}{E'}$

— " — planet $\lambda = \frac{h}{E}$

Endring i bølgelengde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = h\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right)$.

Dopplerformel: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}}{\frac{1}{E}} = \frac{\frac{1}{\gamma E(1+v)} - \frac{1}{E}}{\frac{1}{E}}$

(Satt inn for E' fra 2b)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\gamma(1+v)} - 1}{} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v} - 1 = \sqrt{\frac{(1-v)(1+v)}{(1+v)^2}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} - 1.$$

Merk forskjellen i fortegn fra det oppgitte svaret: Vi brukte at positiv hastighet v betyr at strålingskilden kommer <u>mot oss</u>.

2d) Antar gul farge: $\underline{\lambda = 580\,nm}$

Har at $v = 0,2$. Setter inn

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -0,184 \Rightarrow \Delta\lambda = -106\,nm$$

Får da $\lambda' = 580\,nm - 106\,nm = 474\,nm$

som tilsvarer <u>blå</u> farge.

3a) Massen av en kule med uniform tetthet ρ_0 og radius r må være:

$$masse = \frac{masse}{volum} \cdot volum = \underline{\underline{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}}$$

$$\frac{masse}{volum} \rightarrow \text{tetthet } \rho_0 \qquad volum \rightarrow \text{kule } \frac{4}{3}\pi r^3$$

3b) Ideel gass (fra formelsamling):

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$$

der k = Boltzmannkonst, T = temperatur, μ = midlere molekylvekt målt i hydrogenmasse og m_H = hydrogenmassen

3b fortsetter

Hydrostatisk likevekt:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho_0 G \frac{M(r)}{r^2} = -\underline{\rho_0^2 \frac{4}{3}\pi r G}$$

Setter inn for $P = \frac{\rho_0 kT}{\mu m_H}$ der ρ_0 er konstant

$$\frac{\cancel{\rho_0} k}{\mu m_H} \frac{dT}{dr} = -\rho_0^{\cancel{2}} \frac{4}{3}\pi r G$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 r \frac{\mu m_H}{k}$$

3c) Ganger opp med dr og integrerer

$$\int_{r=0}^{r=R} dT = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} \int_0^R r\,dr$$

$$T(R) - \underbrace{T(0)}_{\substack{\text{kjernetemp} \\ T_c}} = -\frac{2\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} R^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_c = T(R) + \frac{2\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} R^2}}$$

3d) Hvis vi kun har protoner, altså hydrogen-kjerner så er $\mu = 1$.

$M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $R_\odot = 6{,}98 \cdot 10^8$ m, $T_\odot = 5780$K

Midlere tetthet $\rho_0 = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} = \underline{1404 \text{ kg/m}^3}$

Da har vi $T_c = 5780\text{K} + \frac{2\pi}{3} G R_\odot^2 \rho_0 \frac{m_H}{k}$

$\underline{= 11{,}6 \text{ millioner K}}$

4) $\rho = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ Kg m}^{-3}$

$T_c = 1{,}57 \cdot 10^7$K

$X_H = 0{,}33$

$L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}$W

Fra formelsamling har vi at luminositet per masse, ε_{pp}, for pp-kjeden er gitt ved

$$\frac{L}{M} = \varepsilon_{0,pp} \cdot X_H^2 \rho T_6^4$$

Massen M til kjernen er $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_c^3$

og $\underline{T_6 = 15{,}7}$ Dermed $\frac{L_\odot}{\rho \frac{4}{3}\pi R_c^3} = \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$

$\Rightarrow R_c = \underline{0{,}026 R_\odot}$