Oppsummering av forrige forelesning

Modell av univeret: galakser $\longrightarrow \rho(\vec{x}, t)$

$\xrightarrow{\text{DKP}} \rho(t)$

Homogent
og isotropt
univers

$\Downarrow$

$v = H_0 d$, hvis ekspansjon

Hva kan drive tidsutvikling av $\rho = \rho(t)$?

Bare gravitasjon. Newtonsk eller Einsteinsk?

Om gravitasjon

Finne $g(t)$ → Vite hvilke krefter som virker

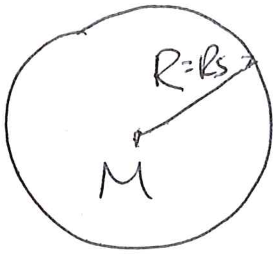
~~Sterk~~
~~Svak~~
~~EM~~
Gravitasjon

Newtonsk eller GR?

~~GR: svakt felt og $v <<$~~

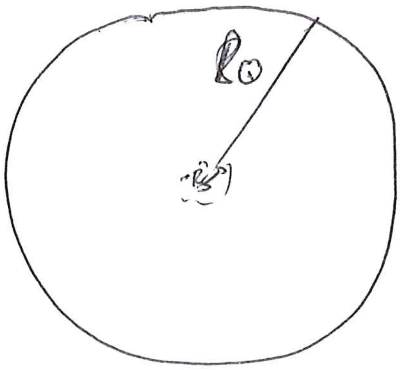
Newton: svakt felt og $v << c$

Hva er svakt felt?



$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = 3 \frac{M}{M_\odot} \text{ km}$$

Svart hull: $R = R_S$, utvilsomt sterkt felt



$R_\odot \simeq 7 \cdot 10^5$ km

$R_S = 3$ km

$R >> R_S$ → svakt felt

Galakse : $R \sim 10^5$ ly $\sim 10^{18}$ km

$M \sim 10^{11} M_\odot \rightarrow R_S \sim 3 \cdot 10^{11}$ km

$R >> R_S \Rightarrow$ svakt felt

Midlere tetthet i universet, $\rho \sim 10^{-26}$ kg/m^3

Masse innenfor avstand R = $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$

$\approx 4 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^9 \text{m}^3 \cdot \left(\frac{R}{10^3 \text{m}}\right)^3$

$= 4 \cdot 10^{-17} \left(\frac{R}{1\text{ km}}\right)^3$ kg

Schwarzschild-radius som svarer til denne massen

$$R_S = 3 \text{ km} \cdot \frac{M}{M_\odot} = \cancel{3}\text{km}$$

$$\frac{R_S}{1\text{ km}} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-17} \text{kg}}{2 \cdot 10^{30} \text{kg}} \left(\frac{R}{1\text{ km}}\right)^3 = 6 \cdot 10^{-47} \left(\frac{R}{1\text{ km}}\right)^3$$

$$R_S = R$$

$$\Rightarrow \frac{R}{1\text{ km}} \sim \sqrt{\frac{10^{47}}{6}} = \sqrt{\frac{10}{6} \cdot 10^{46}} \approx 10^{23}$$

$$R \sim 10^{23} \text{ km} = 10^{26} \text{ m} \approx 10^{10} \text{ lysår}$$

$\sim$ ~~size of the~~ str. på obs. univers

Typiske galaksehastigheter $\sim 10^2 - 10^3 \ \mathrm{km/s}$

Men $v = c$ for $d = \frac{c}{H_0}$ (H-L) $<<< c$

⟹ Newton antageligvis OK så lenge vi ser på områder som er betydelig mindre enn det obs. univers

Men :
- vi vil gjerne modellere hele universet, ikke bare deler av det
- vi er interessert i hvordan lys beveger seg gjennom universet, $v = c$
- GR er begrepsmessig forskjellig fra newtonsk gravitasjon (krumt tidrom)
  Flere kilder til gravitasjon enn i newtonsk teori: ~~stråling~~ energi, trykk, ..

Hva gjør vi : Introduserer tidrommets geometri, beskrevet av et <u>linjeelement</u>, men bruker ikke feltligningene. Motiverer dynamiske ligninger newtonsk.

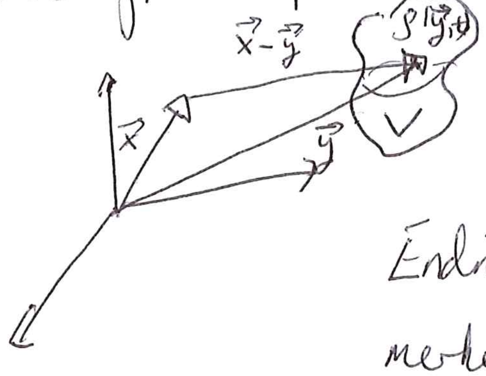
Litt om GR

SR: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 =$ invariant

Newton: $dt =$ invariant

$dx^2 + dy^2 + dz^2 =$ invariant

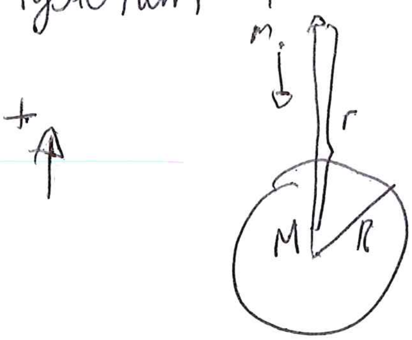
Newtonsk gravitasjon



$$\phi(\vec{x},t) = -\int_V \frac{G\rho(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3y$$

Endringer i ρ i $\vec{y}$ ved t merkes øyeblikkelig i $\vec{x}$, uansett hvor stor $|\vec{x}-\vec{y}|$ er. Ikke konsistent med SR.

Mysterium i newtonsk teori:



$$\begin{cases} F = -\dfrac{G M_g m_g}{r^2} \\ \text{og} \\ F = m_i a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{m_g}{m_i} \frac{G M_g}{r^2}$$

Eksperimenter: $m_g = m_i$ for alle partikler

Ingen opplagt grunn til at det skal være slik:

$m_g \to$ "gravitasjonsladning"

$m_i \to$ bestemmer dynamisk respons på alle typer krefter, ikke bare gravitasjon.

Ingen andre krefter har denne egenskapen.

Ekvivalens konstant tyngdefelt $\leftrightarrow$ konstant akselerasjon

Avbøyning av lys

$\to$ Gravitasjon er egenskap ved tidrommet. Partikler beveger seg fritt i "rett linje" i et krumt tidrom

Geometrien til tidrommet er bestemt av fordelingen av masse og energi. Geometri beskrevet av linjeelementet / metrikken

metrikken

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$$

$$\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Eksempel (se AST 2000): Schwarzschild tidrommet utenfor en sfærisk massefordeling

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}}$$

$$- r^2 \underbrace{\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)}_{\equiv d\Omega^2}$$

I Newtonsk grense: $\frac{2GM}{c^2r} \ll 1$ (svakt felt)

$$\Rightarrow ds^2 \approx c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2$$

$$-\left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Lav fart: $v \ll c$

Radielt fall: $dr = v\,dt \ll c\,dt$

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)v^2dt^2$$

$$\approx c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2$$

): Newtonsk gravitasjon for objekter med $v \ll c$ skyldes ikke romlig krumning

Kosmologi: Linjeelement for tidrom der rommet er homogent og isotropt (KP)

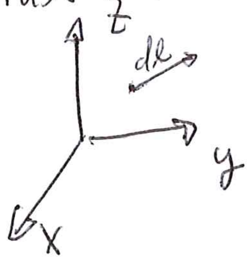
RW - linjeelementet

Hva kan vi si om linjeelementet uten å løse feltligningen? Ganske mye!

Fordi: DKP, legger sterke føringer på den romlige delen

Hvilke rom oppfyller DKP?

3d euklidsk rom



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

I 2d er overflata til ei 3d-kule et homogent og isotropt rom