UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i AST2110 — Universet

Eksamensdag: Fredag 9. juni 2006

Tid for eksamen: 09.00 – 12.00

Løsningsforslag

Oppgave 1

Robertson-Walker metrikken er

$$(ds)^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right),$$

der r er en radiell medfølgende koordinat (læreboken bruker symbolet ϖ om denne) og $R(t)$ er universets skalafaktor.

Vi skal se på en galakse i kosmologisk avstand, gitt ved rødforskyvningen z. Den radielle koordinaten til galaksen er r_e, og en lysstråle sendes mot oss fra galaksen ved $t = t_e$ og når oss i $r = 0$ ved t_0. Vi har at $1 + z = R(t_0)/R(t_e)$. Hubbleparameteren er gitt ved $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$. Vi definerer

$$\omega = \int_0^{r_e} \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}.$$

a) Forklar kort begrepene metrikkavstand ("proper distance"), d, og luminositetsavstand, d_L.

Med metrikkavstand, d, menes den avstand man ville måle med målestaver hvis man kunne lese dem av samtidig i kosmisk tid (t).

Luminositetsavstand d_L er definert ved at

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2},$$

der F er mottatt fluks og L er utsendt luminositet til objektet.

b) Begrunn at metrikkavstanden til galaksen er gitt ved $d(t_0) = R(t_0)\omega$ og luminositetsavstanden ved $d_L(t_0) = R(t_0)r_e(1+z)$.

Vi har altså at vi er i origo og galaksen ved r_e. Avlesing ved samtidighet i kosmisk tid vil si at t er den samme, dvs. $dt = 0$. Vi måler avstand langs den geodetiske kurve, dvs. at vi ikke endrer retning, så $d\theta$ og $d\phi$ er begge 0. Vi ser da fra RW-metrikken at avstandselementet ved tiden t langs den radielle retningen er gitt ved $(dd)^2 = R^2(t)dr^2/(1-kr^2)$, eller ved å ta kvadratroten,

$$dd = R(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

Ved å integrere denne fra $r = 0$ til $r = r_e$ finner vi at $d(t) = R(t)\omega$. Setter vi inn $t = t_0$ får vi svaret som skal vises.

For å finne luminositetsavstanden må vi finne fluksen fra en kilde med luminositet L. Luminositet er

energi utsendt pr. tid. Vi tenker oss at kilden sender ut fotoner i alle retninger, og sender ut N fotoner i løpet av tidsrommet Δt_e som alle har energi $E_e = h\nu_e = hc/\lambda_e$. Det vil si at kildens luminositet er

$$L = \frac{Nhc}{\lambda_e \Delta t_e}.$$

Disse samme N fotonene vil i dag passere et kuleskall med areal A_0 der vi er på overflaten. De N fotonene har nå hver energi hc/λ_0 og de passerer kuleskallet i løpet av tiden Δt_0. Fluks er energi pr. tid pr. flate, slik at

$$F = \frac{Nhc}{A_0 \lambda_0 \Delta t_0}.$$

Vi ser fra dette at

$$F = \frac{L \lambda_e \Delta t_e}{A_0 \lambda_0 \Delta t_0}.$$

Men pr. definisjon er $\lambda_0/\lambda_e = 1 + z$, og samtidig er $\Delta t_0/\Delta t_e = 1 + z$. Altså har vi at

$$F = \frac{L}{A_0 (1+z)^2}.$$

Vi kan finne A_0 fra RW-metrikken, flateelementet ved konstant $r = r_e$ (dvs. $dr = 0$) målt ved tiden t_0 ($dt = 0$) er fra RW-metrikken $dA_0 = R^2(t_0) r_e^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Integrerer vi dette over hele kuleflaten (θ fra 0 til π og ϕ fra 0 til 2π) finner vi at $A_0 = 4\pi R^2(t_0) r_e^2$.

Vi har altså

$$F = \frac{L}{4\pi R^2(t_0) r_e^2 (1+z)^2}.$$

Ut fra definisjonen ser vi da at $d_L = R(t_0)r_e(1+z)$.

c) En universmodell som har blitt svært populær de siste årene er gitt ved at $k = 0$ og $R(t) = Ae^{H_0 t}$, der A og H_0 er konstanter. Vis at i denne modellen er Hubbleparameteren virkelig en konstant, $H(t) = H_0$.

Vi har altså at

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}.$$

Den deriverte av $R(t)$ er $AH_0 \exp(H_0 t)$, slik at $H(t) = H_0$.

d) Vis ved å se på lysstrålen (hint: $ds = 0$ for lys) som beveger seg fra galaksen til oss at

$$\omega = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}.$$

For lys er $ds = 0$ (ingen egentid målt for en partikkel med $v = c$), og lys beveger seg i geodetisk linje, dvs. $d\theta = d\phi = 0$. Bevegelsesligningen for et foton er derfor fra RW-metrikken gitt ved

$$c^2 dt^2 = R^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2},$$

eller hvis vi tar kvadroten og ser på et foton som beveger seg i negativ r-retning fra $r = r_e$ til $r = 0$,

$$c\frac{dt}{R(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

Hvis vi integrerer denne fra r_e til 0 (og da i tid fra t_e til t_0), får vi

$$\omega = \int_0^{r_e} \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}.$$

e) For modellen fra punkt c), vis at

$$\omega = \frac{cz}{H_0 R(t_0)}.$$

Vi har altså at $R(t) = A\exp(H_0 t)$**, der** A **og** H_0 **er konstanter.**

Fra d) har vi at $\omega = c\int_{t_e}^{t_0}(A\exp(H_0 t))^{-1}dt$ **som ved regning gir**

$$\omega = \frac{c}{H_0 A}\left(e^{-H_0 t_e} - e^{-H_0 t_0}\right) = \frac{c}{H_0 A e^{H_0 t_0}}\left(e^{H_0(t_0 - t_e)} - 1\right).$$

Men vi har jo at $R(t_0) = A\exp(H_0 t_0)$**, så**

$$\omega = \frac{c}{H_0 R(t_0)}\left(e^{H_0(t_0 - t_e)} - 1\right).$$

Men vi har at

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} = e^{H_0(t_0 - t_e)},$$

og dermed er

$$\omega = \frac{c}{H_0 R(t_0)}\left((1+z) - 1\right) = \frac{cz}{H_0 R(t_0)}.$$

Dette kunne også vært gjort mer elegant ved å innføre

$$\omega = c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{R(t)} = c\int_{R(t_e)}^{R(t_0)}\frac{dR}{R\dot{R}(R)} = c\int_{\frac{R(t_0)}{1+z}}^{R(t_0)}\frac{dR}{R\dot{R}(R)}.$$

I dette tilfellet har vi jo at $\dot{R} = AH_0 \exp(H_0 t) = H_0 R$. Dvs.

$$\omega = c \int_{\frac{R(t_0)}{1+z}}^{R(t_0)} \frac{dR}{H_0 R^2},$$

hvorfra svaret kommer direkte.

f) Finn for denne modellen metrikkavstanden, d, og luminositetsavstanden, d_L, til galaksen. Vis at de generelt er forskjellige, men at vi for $z \ll 1$ har tilnærmet Hubbles lov, enten vi anvender metrikkavstand (for metrikkavstand gjelder for denne modellen Hubbles lov eksakt) eller luminositetsavstand som avstandsmål.

Metrikkavstanden er

$$d = R(t_0)\omega = \frac{cz}{H_0}.$$

For å finne luminositetsavstanden, må vi finne r_e, men i dette tilfellet var $k = 0$, derfor er

$$\omega = \int_0^{r_e} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \int_0^{r_e} dr' = r_e.$$

Altså er for denne modellen $r_e = cz/(H_0 R(t_0))$, og vi har at

$$d_L = R(t_0) r_e (1 + z) = \frac{cz(1 + z)}{H_0}.$$

For metrikkavstanden ser vi at $cz = H_0 d$, dvs. med dette avstandsmålet gjelder Hubbles lov eksakt.

Vi ser at luminositetsavstanden i dette tilfellet er lik $d(1+z)$, dvs. de er ikke like. Men for $z \ll 1$ er $1+z \sim 1$, og $cz \sim H_0 d_L$, dvs. også for luminositetsavstand stemmer Hubbles lov tilnærmet når $z \ll 1$.

Oppgave 2

Svar kort på spørsmålene.

Noen av løsningsforslagene er mer utf orlige enn jeg forventer at besvarelsen skal være

a) Hva er ekliptikken?

Solas bane på himmelkula i løpet av året (storsirkelen som dannes av skjæringen mellom jordas baneplan og himmelkula).

b) Hva er omløpstiden for en planet i solsystemet med gjennomsnittsavstand fra solen på 5,2 AU?

Keplers tredje lov sier at P^2/a^3 er konstant, dvs. hvis vi normaliserer til jorda og bruker AU og år som mål, er $P = a^{3/2}$. Hvis vi setter inn $a = 5,2$AU (Jupiters avstand), får vi $P = 11,9$ år (Jupiters omløpstid).

c) Sirius har en parallakse på 0,377". Hva er avstanden til Sirius i parsec?

$d = 1/p = 2,65$**pc**

d) Sirius har apparent størrelsesklasse (magnitude) $-1,46$ mens Aldebaran har apparent størrelsesklasse $+0,86$. Hvor mye større fluks mottar vi fra Sirius enn fra Aldebaran?

$$m = -2,5\log_{10} F + konst.$$

Altså har vi at $m_2 - m_1 = 2,5\log_{10}(F_1/F_2)$, eller

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{0,4(m_2-m_1)}.$$

Her har vi at $m_{\text{Aldebaran}} - m_{\text{Sirius}} = 0,86 + 1,46 = 2,32$**. Altså er**

$$\frac{F_{\text{Sirius}}}{F_{\text{Aldebaran}}} = 10^{0,4 \cdot 2,32} = 8,5.$$

e) Aldebaran har absolutt størrelsesklasse $-0,20$. Hva er avstanden til Aldebaran?

Fra definisjonen av absolutt størrelsesklasse har vi den astronomiske avstandsformel,

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5.$$

I dette tilfellet er $m - M = 0,86 + 0,20 = 1,06$**. Fra avstandsformelen har vi at**

$$\log_{10} d = \frac{1}{5}(5 + 1,06),$$

dvs. $d = 16,3$**pc.**

f) Hvor lang tid vil det normalt gå mellom to påfølgende høyvann?

Hvis vi ser bort fra andre effekter enn månenes virkning på vannet (tenker oss at jorda er dekket med hav av konstant dybde etc.) vil det bli høyvann når månen står rett i syd og når månen står rett i nord, dvs. to ganger pr. døgn når døgnet regnes i forhold til månen. Dette døgnet er litt lengre enn døgnet i forhold til sola, fordi månen går rundt jorda i samme retning som jorda roterer, dvs. døgnet i forhold til månen er på ca. 14 timer og 50 minutter. Dvs. tiden mellom to påfølgende høyvann burde være ca. 12,5 timer.

g) Hva er hovedbestanddelene i vår galakse?

De viktigste stjerne-komponenetene er den tynne skiva, den tykke skiva, bulgen (kjerneområdet), samt halostjerner inklusive kulehoper. Komponenter av gass er forholdsvis tett og kald gass i galakseplanet (denne er også delt i tynnere og varmere, og kaldere og tettere komponenter), og dessuten en tynn og varm komponent utenfor denne. Støv er fordelt sammen med den kalde og tette gasskomponenten. En annen viktig komponent er galaksens kjerne, som sannsynligvis består av et stort sort hull. Til sist må nevnes den massemessige viktigste komponeneten, haloen av mørk materie.

h) Skisser Hubbles stemmegaffeldiagram, og angi hvilke galaksetyper du finner i det.

Se lærebokas figur 23.1

i) Under hvilke omstendigheter kan man observere en Einstein-ring?

En Einstein-ring kan observeres når en punktkilde, en punktformet masse (gravitasjonslinsen) og observatøren befinner seg nøyaktig på linje. Ringen har radius lik Einsteinradien,

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\left(\frac{d_S - d_L}{d_S d_L}\right)},$$

der d_S er avstanden til kilden og d_L avstanden til linsen (angulær diameteravstand).

j) Hva er fellesbetegnelsen på bl. a. radiogalakser, kvasarer, Seyfertgalakser og BL Lacertae-objekter? Hva tror man er energikilden i disse?

Aktive galakser, Aktive galaksekjerner eller AGN. Energikilden er gass som faller inn mot et meget stort sort hull.