Løsning, gruppeoppgave om corioliskraft og karusell, oppgave 7 uke 15 i FYS-MEK/F 1110 våren 2005

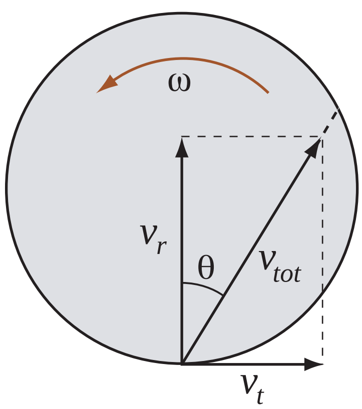
Oppgaven lød:

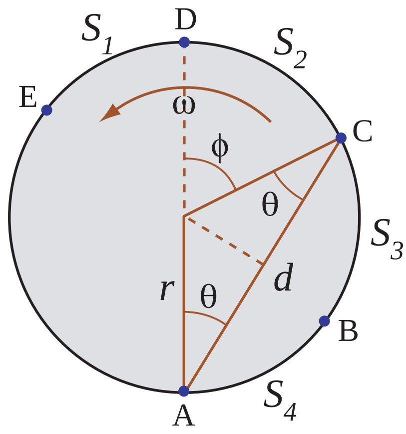
> To barn står diamentralt i forhold til hverandre ved ytterkanten på en karusell med diameter 6.0 m. Karusellen dreier seg rundt 12 ganger i minuttet. Et av barna kaster en ball med masse 0.50 kg til det andre barnet, ballen har en orisontal hastighet på 6.0 m/s. Beregn Corioliskraften på ballen mens den er i lufta, og finn hvor mye ballen vil bomme på målet.

Denne oppgaven kan (i likhet med de fleste andre tilsvarende problemer) løses på to måter, enten ved å bruke Newtons lover og virkelige krefter i et ikke-roterende referansesystem, eller ved å legge fiktive krefter (corioliskraft og sentrifugalkraft) til de virkelige kreftene dersom man beskriver bevegelsen i det roterende referansesystemet. Her er min måte å løse dette på innenfor hvert av disse referansesystemene:

1. Ikke-roterende referansesystem

Dette systemet er (tilnærmet) et ekte inertialsystem, og vi kan finne ut hvordan bevegelsen er i “bakkesystemet” ved å bruke Newtons lover og virkelige krefter. Når vi ser bort fra luftmotstanden, er det bare gravitasjonen som virker. Denne har ingen betydning for bevegelsen i horisontalplanet siden gravitasjonen er loddrett. Vi kan derfor nøye oss med å betrakte bare selve horisontalbevegelsen.





Figuren viser hastigheten som ballen har når den blir kastet. Den har en radiell hastighet på 6.0 m/s, men siden barnet som kaster ballen følger med karusellen, vil ballen *i forhold til bakken* også ha en tangentiell hastighet. Denne er lik ωr der ω er vinkelhastigheten og r er radien på karusellen. Vinkelhastigheten er lik $2\pi\cdot$*antall omdreininger pr sekund*, altså:

$$\omega = 2\pi\frac{12}{60}\text{ pr sek} = \frac{2\pi}{5}\text{ pr sek}$$

Da følger det at den tangentielle hastigheten v_t er lik 3.77 m/s, og den totale hastigheten 7.09 m/s.

I bakkesystemet går ballen rett fram mens karusellen snurrer under ballen mens den er i flukten. Ballen vil i forhold til bakken starte i A og ende i C (høyre del av figuren). Men mens ballen er på vei over karusellen, dreier denne. Derfor vil kasteren havne i B når ballen havner i C, og barnet som skulle ha tatt imot ballen vil havne i E. Vi ser altså at ballen bommer svært mye på mottakeren.

Vi ønsker å finne avstanden mellom den som skulle fått ballen og der ballen er idet den når kanten. Det er buen S1+S2 vi da bør finne, evt en vinkel som tilsvarer denne buen.

Ut fra det vi vet om radiell og tangentiell hastighet i starten, kan vi bestemme vinkelen θ. Denne blir:

$$\theta = arc\tan\left(\frac{v_t}{v_r}\right) = arc\tan\left(\frac{3.77}{6.00}\right) = 32.14 \text{ grader}$$

Ut fra vanlig trigonometri, vet vi at vinkelen ϕ er lik 2θ (sjekk selv at du ser hvorfor). Følgelig kan vi allerede nå finne buen S2:

$$S_2 = 2\pi r \cdot \frac{2 \text{ ganger vinkelen } \theta \text{ i grader}}{360} = 3.37 \text{ m}$$

For å finne buen S1 starter vi med å bestemme lengden på korden *d* der ballen farer over karusellen, for vi har:

$d/2 = r \cdot \cos\theta$, herav får vi at $d = 5.08$ m.

Vi kjenner allerede total hastighet i “bakkesystemet”, og finner da tiden ballen bruker på å tilbakelegge korden AC:

$$t = \frac{d}{v_{tot}} = \frac{5.08}{7.09} \text{ s} = 0.717 \text{ s}$$

Ut fra denne tiden kan vi finne ut hvor langt barna har beveget seg mens ballen var over karusellen. Det er buen S1 som er lik buen S4:

$$S_1 = \omega r t = \frac{2\pi}{5} \cdot 3 \cdot 0.717 = 2.70 \text{ m}$$

Følgelig blir buen S1 + S2 rett og slett lik:

$$S_1 + S_2 = 6.07 \text{ m}$$

Med andre ord, bommen var betydelig!

2. I det roterende referansesystemet

I dette systemet virker tyngden som gir en bevegelse i loddrett retning, og i horisontal retning får vi kun den radielle hastigheten v_r. Men siden systemet roterer, må vi også trekke inn fiktive krefter som ikke har fysisk opphav, men som må til for å gi en brukbar beskrivelse dersom vi bruker Newtons lover innenfor det roterende systemet. I vårt tilfelle er det corioliskraften og sentrifugalkraften som da må trekkes inn. “Kreftene” som virker i horisontalplanet er da som følger:

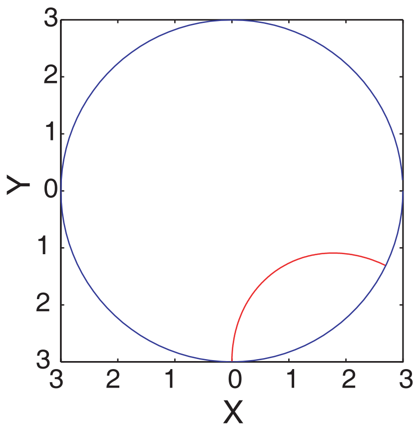
$$\vec{F}_{horisontal} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}$$

Akselerasjonen blir da lik denne kraften dividert på massen til ballen. Merk at vi her har en vektor-likning. Omega er vinkelhastigheten og peker loddrett oppover slik at komponentene er $(0,0,\omega)$. Posisjonsvektor til ballen og hastighetsvektor til ballen vil endre seg underveis på en nokså komplisert måte. Det går sikkert an å løse dette problemet med analytisk matematikk, men når vi først har numeriske løsningsmetoder, kan vi jo like godt bruke disse. Det er jo svært så enkelt etter at vi har vært gjennom prosjektoppgaven.

En listing av hovedprogrammet er vedlagt (bruker adaptiv Runge-Kutta, kunne vel så godt brukt regulær Runge-Kutta i dette tilfellet).

Også en listing av hjelpeprogrammet som brukes ved Runge-Kutta-rutinen rka4 (brukt i prosjektoppgaven) er vedlagt.

Kjører vi disse programmene, får vi følgende bane for ballen:



Buelengden S1 + S2 (fra rett opp i figuren der den som skulle tatt mot ballen står, og ut til der ballen treffer randen) blir av dataprogrammet beregnet til: 6.07 m.

Vi ser altså at det er full overensstemmelse mellom beskrivelsen i “bakkesystemet” (et inertial-system) hvor bare fysisk virkelige krefter ble tatt med, og beskrivelsen i “karusellsystemet” (et roterende referansesystem), hvor vi også måtte trekke inn de fiktive kreftene som synes å virke når vi gjør beregninger innenfor det roterende systemet.

[PS. Vertikalbevegelsen pga tyngdekraften vil ikke påvirke disse beregningene siden hastighets og posisjonskomponenter i vertikal retning vil forsvinne etter kryssprodukt med vinkelhastigheten.]

Blindern, 10. mai 2005

Arnt Inge Vistnes

Vedlegg 1: Listing av hovedprogrammet som ble brukt for å beregne banen i det roterende referansesystemet.

```
clear all;
N = 100;              % Ca antall punkter vi antar å bruke i beregningene
err = 1.0e-12;         % Feilmargin brukt ved adaptiv Runge-Kutta.
ts = 0.0;              % Velger å starte klokka (t=0) ved forsøkets start
tn = 1.0;              % Omtrentlig tidsrom vi ønsker å studere bevegelsen i.
                     % Brukes HER bare for å gi et første tips til
                     % delta_t for beregningene.
r = zeros(N,3);        % Allokerer plass i hukommelsen for
v = zeros(N,3);        % posisjon og hastighet,

t = zeros(N,1);        % Allokerer plass for faktisk brukt tid i bane

% Initialbetingelser (posisjon og hastighet i SI-enheter)
r1(1) =  0.0;
r1(2) = -3.0;
r1(3) =  0.0;
v1(1) =  0.0;
v1(2) =  6.0;
v1(3) =  0.0;

% Hele initialbetingelsene samles i én vektor og paramtre i en annen
status = [r1 v1];
omega = 2*pi*12/60;  % Vinkelhastighet
delta_t=(tn-ts)/(N-1);    % Lengde på tidsstegene Bare startverdi.
                      % Endres underveis ved adaptiv metode.
n=0;
avst=norm(r);            % Avstand origo til punkt
while (avst<3.0001)       % Løkke for å beregne de resterende punktene
   n = n+1;
   r(n,1) = status(1); r(n,2) = status(2); r(n,3) = status(3);
   v(n,1) = status(4); v(n,2) = status(5); v(n,3) = status(6);
   t(n)=ts;
   [status ts delta_t]=rk4a(status,ts,delta_t,err,'corioliskraft3d', ...
      omega);         % 4. ordens adaptiv Runge-Kutta
                     % hvor likningene for kraften (akselerasjonen)
                     % ligger i funksjonen coriolsikraft3d.m.
    avst = norm(r(n,:));
end;
N = n;                 % Virkelig antall beregnede punkter
t(n)                   % Utskrift av antall sek. før ball når randen

% Beregner vinkel til punktet ballen forlater karusellen
psi = atan2(-r(n,2),r(n,1))*360/(2*pi) % Vinkelen fra atan2 er i radianer
bue = 2*pi*3.0*(psi+90)/360

% Lager en sirkel for å visualisere resultatet bedre
for n=1:100
   phi=2*pi/100;
```

```
rsirkel(n,1)=3.0*cos(phi*n);
   rsirkel(n,2)=3.0*sin(phi*n);
end;

% Diverse plot. Valgt 2D
plot(r(:,1),r(:,2),'-r');
hold;
plot(rsirkel(:,1),rsirkel(:,2),'-b');
daspect([1 1 1]);      % Ønsker å ha lik skalering på alle aksene
xlabel('X');
ylabel('Y');
```

Vedlegg 2: Hjelpeprogrammet som ble brukt (denne delen gir de fungerende kreftene i horisontalplanet, det vil si corioliskraft og sentrifugalkraft).

```
function deriv = corioliskraft3d(status,t,param)

% Dette er et miniprogram som brukes ved integrering av Newtons
% 2. lov i mekanikken når akselerasjonen skyldes Coriolis og
% sentrifugalkraft.
% Hensikten med denne rutinen er rett og slett å få gitt inn
% likningsettet som benyttes som input i Runge-Kutta-rutinen rk4
% eller i rk4a (adaptiv RK).
% Input er statusvektor (posisjon og hastighet, begge i tre (!!!)
% dimensjoner), og returverdiene er den deriverte av posisjon
% og hastighet, det vil si hastighet og akselerasjon.
% Programmet er skrevet av Arnt Inge Vistnes 1. mai 2005.

% Beregner akselerasjonen:
r = [status(1) status(2) status(3)];  % Henter ut posisjonen
v = [status(4) status(5) status(6)];  % og hastighet
omega(3) = param;                     % Henter omega fra parameterne
omega(1) = 0; omega(2) = 0;
a = -cross(omega,cross(omega,r))-2*cross(omega,v);
                               % sentrifugal- og
                               % Coriolisakselerasjon

% Returnerer de deriverte av statusvektor (dvs hast. og aksel.
% I alt seks tall som en vektor
deriv = [v a];
return;
```