Notat i FYS-MEK/F 1110 våren 2006

Rulling og skliing av kuler og sylindre

Forelest 24. mai 2006 av Arnt Inge Vistnes

Generelt

Rotasjonsdynamikk er en svært viktig del av mekanikkurset vårt. Dette er nytt stoff sammenlign med hva man møter på den videregående skolen, og man får ofte bruk for store deler av pensum for å løse en og samme oppgave. Det er derfor ikke rart at nesten ethvert eksamenssett de siste årene har hatt minst en oppgave knyttet til rotasjonsdynamikk.

Generelt sett kan de fleste oppgavene vi kommer bort i løses ved å bruke tre ligningsett, nemlig de som er basert på:

- Massesentersatsen (Newtons annen lov): $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$
- Spinnsatsen på følgende form: $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$ eller på formen: $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, og endelig
- En eller annen geometrisk føring som f.eks. forbinder a_{cm} med α.

Det er da essentielt at man angir hvilket system man anvender massesentersatsen på, og når man bruker spinnsatsen, må man i tillegg angi hvilken akse man anvender den for. Et kraftmoment har jo ingen mening uten at man angir en akse, heller ikke har spinn noe mening om man ikke angir akse. Så dette er meget viktig.

Massesentersatsen er enklest å bruke fordi uansett *hvor* krefter virker på et stivt legeme, så vil akselerasjonen til massesenteret følge denne loven.

Spinnsatsen er mer problematisk. Vi må ofte skille mellom et fritt bevegelig legeme og et legeme som faktisk roterer om en fast akse. Den faste aksen behøver ikke være en virkelig akse med kulelagre osv. Vi kjenner til oppgaven med et sykkelhjul som treffer en fortauskant, og også i en slik type oppgave vil vi kunne betrakte bevegelsen som en rotasjon om en fast akse (fortauskanten) så lenge hjulet ikke glir mot kanten.

Spinnsatsen angitt i den første formen ovenfor, er mest generell. I denne kan spinnet $\vec{L}$ både være “egenspinn” (spinn om en akse gjennom legemet) eller “banespinn” (et legeme som farer forbi eller rundt en tenkt akse), eller summen av disse. Siste formen kan bare brukes når vi har et legeme som roterer omkring en symmetriakse (gjennom massesenteret), eller dersom aksen er fast.

Den geometriske føringen kan gjerne være den vi har ved ren rulling (eller når vi trekker en snor omkring en trinse uten at den slir), nemlig en av de følgende:

$$s = r\theta,\ v = r\omega \text{ eller } a = r\alpha$$

der s, v og a står for veilengde, hastighet og akselerasjon for den translatoriske bevegelsen og θ, ω og α tilsvarende for rotasjonsbevegelsen. Men disse relasjonene må ikke brukes ukritisk! Dersom vi har en jojo-oppgave, der snora trekkes ut fra en sylinderformet tapp i midten, vil ikke jojo-en bevege seg en veilengde langt større enn den snorlengden vi snurrer ut. Videre må man være svært nøye med fortegn. Vi står nemlig fritt i å definere positiv bevegelsesretning for den translatoriske bevegelsen, og vi kan velge fritt hva vi vil definere som positiv rotasjonsretning. Det kan derfor like godt hende at vi må bruke $a = -r\alpha$ som $a = r\alpha$. Vi må selv passe på at det blir samsvar mellom de variablene vi velger.

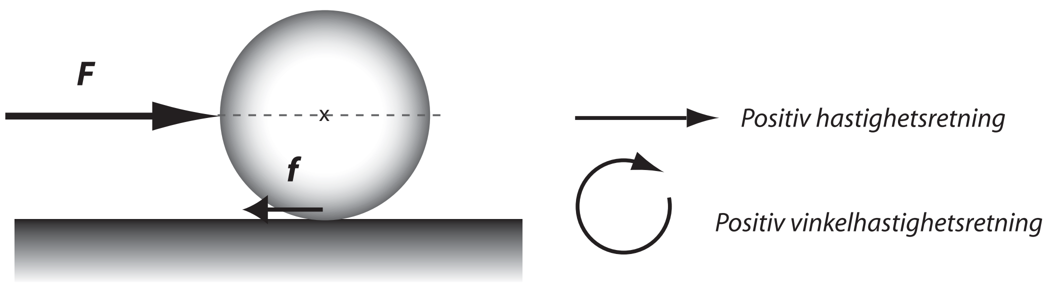
For frittbevegelige legemer er det ofte enklest å betrakte bevegelsen som summen av en translatorisk og en rotasjonsbevegelse. Vi velger da om mulig en (tenkt) rotasjonsakse som går gjennom massesenteret, for da kan vi nokså lett beregne totalbevegelsen siden massesentersatsen nettopp gir bevegelsen til massesenteret og spinnsatsen gir oss bevegelsen om aksen gjennom massesenteret.

Man bør merke seg at vi iblant kan få nokså merkelige resultater ved rotasjonsdynamikk. Spesielt er det ikke alltid lett å forutsi hvilken vei en friksjonskraft kommer til å virke. Dere husker vel f.eks. jojo-oppgaven hvor man ved en spesiell kombinasjon av snor over eller under, og indre radius relativt til ytre, så vil jojo-en faktisk rulle fra oss når vi trekker i snora!

Sylinder som sklir og ruller

Det er en type oppgave som går ofte igjen, nemlig den hvor vi har en kule eller sylinder som sklir og ruller mot et plant underlag. La oss ta for oss den enkleste varianten av slike oppgaver. Selv denne enkleste varianten inneholder en rekke detaljer som man bør merke seg.

Vi starter da med en sylinder som ligger i ro på et horisontalt, plant underlag, som indikert i figuren (ser der sylinderen inn langs aksen slik at vi bare ser et tverrsnitt gjennom den).



Ved tiden $t = 0$ gir vi sylinderen et markant, kraftig støt. Vi anvender da en kraft $\boldsymbol{F}$ som er horisontalt rettet (og vinkelrett på aksen) og som treffer sylinderen i samme høyde som aksen. Dette støtet gir sylinderen en bevegelse, og vi kan analysere denne bevegelsen ved våre lovene nevnt på første side i dette notatet, men vi må i prinsippet behandle bevegelsen gjennom tre ulike faser:

- Støtfasen
- Perioden hvor vi har kombinert skliing og rulling, og
- Ren rulling

Støtfasen

I støtfasen er det fire krefter som virker på sylinderen som system: Tyngdekraften, normlakraften fra underlaget, friksjonskraft mot underlaget og støtkraften. Tyngdekraften og normalkraften er motsatt like store og nuller hverandre ut (ingen akselerasjon i vertikal retning). Tilbake står støtkraften og friksjonskraften, men ved markante støt vil støtkraften ofte være svært mye større enn friksjonskraften. Dette har ofte sammenheng med at støtkraften bare virker i en meget kort tid. Av den grunn er det vanlig (som ved mange kollisjons-oppgaver) å se bort fra friksjonen i denne første støtfasen. Vi kan da hente fram massesentersats og spinnsats og anvende den sistnevnte om sylinderaksen og får:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} \text{ og } \Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = I\frac{d}{dt}\vec{\omega}$$

Vi kan integrere opp disse uttrykkene over den tiden støtet varer:

$$\int_{\text{støt}} \Sigma\vec{F}dt = \int m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}dt = m\int d\vec{v}_{cm} = m(\vec{v}_0 - \vec{v}_i)$$

hvor v_i er hastigheten like før støtet (i vårt tilfelle lik null), og v_0 er hastigheten like etter støtet. Dette er egentlig utledningen på impuls-bevegelsesmengde-teoremet, som sier at impulsen i et støt er lik endring i bevegelsesmengde. Merk at selv om kraften F endrer seg hele tiden innenfor støtperioden, blir resultatet likevel som angitt ovenfor.

Integrerer vi opp spinnsatsen, får vi på tilsvarende vis:

$$\int_{\text{støt}} \Sigma\vec{\tau}dt = I\int d\vec{\omega} = I(\omega_0 - \omega_i)$$

Men vi har i dette tilfellet at kraftmomentet til kraften F er lik null, siden kraftens virkepunkt og retning er slik at kraften ikke har noe arm omkring den valgte aksen. Følgelig vil $\omega_0 = \omega_i$, det vil si, ingen endring i rotasjonshastighet: Sylinderen vil ikke få noe rotasjon gjennom støtet siden den lå i ro allerede før støtet.

Resultatet av det sentrale støtet er altså at massesenteret til sylinderen får en translatorisk hastighet v_0 *like etter støtet*, men sylinderen dreier seg ikke *like etter støtet*. Merk deg skrivemåten “like etter støtet”. Det betyr at vi hittil bare har sett på virkningen av den markante, kortvarige kraften som virket i støtet, og at vi dernest må finne ut hva som skjer deretter.

Kombinert skliing og rulling

Etter støtet blir summen av krefter som virker på sylinderen kun friksjonskraften, i alle fall så lenge som sylinderen sklir mot underlaget. Men friksjonskraften vil føre til at den translatoriske hastigheten avtar samtidig som sylinderen begynner å rulle mer og mer. Før eller siden kommer disse til en grense hvor rullingen er akkurat så stor som den trengs for den translatoriske bevegelsen som da eksisterer. Fra da av vil sylinderen ikke skli mot underlaget, men bare ha det vi kaller “ren rulling”.

Så lenge sylinderen sklir mot underlaget, er friksjonskraften tilnærmet konstant og gitt ved:

$f = mg\mu$, hvor m er sylindermassen, g er tyngdens akselerasjon og μ er den kinetiske friksjonskoeffisienten. Integrerer vi nå massesentersatsen, får vi som før:

$$\int_{\text{skliing}} \Sigma\vec{F}dt = \int m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}dt = m\int d\vec{v}_{cm} = m(\vec{v}_t - \vec{v}_0)$$

Her er v_t hastigheten en tid t etter støtet og v_0 er hastigheten like etter støtet. Men nå kjenner vi i detalj summen av krefter slik at vi også kan gjennomføre integrasjonen i det første leddet:

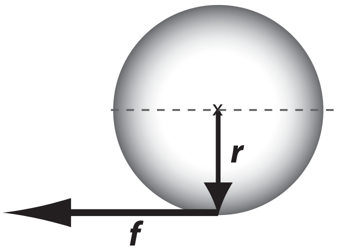
$$\int_{\text{skliing}} \Sigma F dt = \int -mg\mu dt = -mg\mu t$$

Her har vi brukt minustegn fordi friksjonskraften virker i motsatt retning som hastigheten vi opererer med ovenfor. Merk forøvrig at vi her har valgt å si at tiden er null like etter støtet er over slik at tiden t angir tid som skliingen har pågått.

Sammenholder vi disse to uttrykkene, kan vi forkorte bort massen til sylinderen, og vi får (siden vi = 0):

$$v_t = v_0 - g\mu t \qquad \text{(Gjelder bare så lenge det er igjen litt skliing i bevegelsen)}$$

Vi tar så for oss spinnsatsen anvendt om sylinderaksen (symmetriakse, alt i orden). Siden kraften står vinkelrett på posisjonsvektoren r vinkelrett ut fra aksen mot angrepspunktet for kraften, får vi (treghetsmomentet for en sylinder om aksen er 1/2 mr^2):



$$\Sigma\tau = rf = rmg\mu = I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{2g\mu}{r} \qquad \text{(konstant i tid, så lenge vi har skliing)}$$

Da kan vi integrere opp spinnsatsen (eller bruke bevegelsesligningen for konstant vinkelaskselerasjon) og får:

$$\omega_t - \omega_0 = \omega_t = \frac{2g\mu}{r}t \quad \text{(Gjelder bare så lenge det er igjen skliing i bevegelsen)}$$

Vi har nå to ligninger som sier mye om bevegelsen mens skliingen foregår. Akkurat i det øyeblikket skliingen er over kan vi (såvidt) fortsatt bruke ligningene, men da kommer den geometriske føringen inn som gjør at vi kan koble de to ligningene til hverandre. Ved rulling er nemlig $v = r\omega$. Følgelig:

$$v_t = v_0 - g\mu t = r\omega_t = r\frac{2g\mu}{r}t$$

$$v_0 = 2g\mu t + g\mu t$$

$$t = \frac{v_0}{3g\mu}$$

Denne relasjon ser rimelig ut, siden tiden er proporsjonal med starthastighet og omvendt proporsjonal med friksjonskraften.

Vi kan nå sette inn for denne tiden i formelen vi fant for hastigheten ovenfor, og finner:

$$v_t = v_0 - g\mu\mu \cdot \frac{v_0}{3g\mu}$$

$$v_t = \frac{2}{3}v_0$$

Vi får selvfølgelig en litt annen brøk dersom det var en kule som skled i stedet for en sylinder.

Ren rulling

Ligningen ovenfor ga hastigheten akkurat idet skliingen opphørte og vi fikk ren rulling. Men hva skjer etterpå? Skli-friksjonen $mg\mu$ forsvinner da, og hadde vi ikke hatt litt rulle-friksjon, ville sylinderen fortsatt med konstant fart og konstant vinkelfart videre. På grunn av rullefriksjon vil imidlertid den rene rullingen smått om senn gå saktere, men det skjer vanligvis i en langt lavere takt enn hastighetsreduksjonen mens skli-friksjonen var til stede.

Energibetraktning

Like etter støtet hadde sylinderen en rent translatorisk kinetisk energi:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Etter at vi har fått ren rulling, er den kinetiske energien en sum av translatorisk og rotasjonsenergi:

$$E_{\text{rulling}} = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}I\omega_t^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_t}{r}\right)^2$$

Setter vi inn for vt og for treghetsmomentet for en sylinder, og ordner leddene, får vi:

$$E_{\text{rulling}} = \frac{1}{3}mv_0^2$$

Vi ser at vi har hatt et energitap mens skliingen foregikk som er:

$$E_{\text{tap}} = E_0 - E_{\text{rulling}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}mv_0^2 = \frac{1}{6}mv_0^2$$

Dette energitapet kan vi forsøke å regne ut ved å ta utgangspunkt i friksjonskraftens arbeid. Vi kan *forsøke* å beregne dette arbeidet slik:

$$W = \int_{\text{skliperioden}} f ds = f \cdot s$$

hvor s er strekningen skliingen har virket over. Men i denne perioden var starthastigheten v_0 og slutthastigheten 2/3 v_0, og det var konstant akselerasjon (retardasjon). Middelhastigheten i skliperioden må derfor ha vært:

$$v_{middel} = \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{2}{3}v_0\right) = \frac{5}{6}v_0$$

Vi kjenner også til at skliingen foregikk en tid lik $t = \dfrac{v_0}{3g\mu}$. Da må veilengden være:

$$s = v_{middel} \cdot t = \frac{5}{6}v_0 \cdot \frac{v_0}{3g\mu}$$

og det beregnede arbeidet blir:

$$W = f \cdot s = mg\mu \cdot \frac{5v_0^2}{18g\mu} = \frac{5}{18}mv_0^2$$

Vi fant imidlertid ovenfor at energitapet var på:

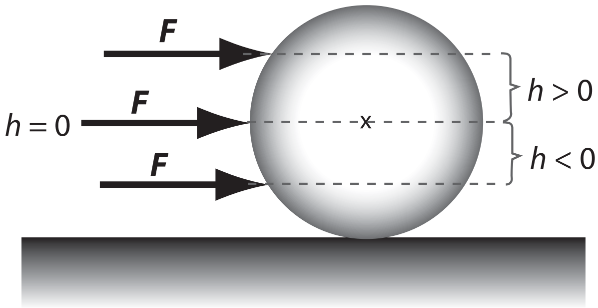
$$E_{\text{tap}} = \frac{1}{6}mv_0^2 = \frac{3}{18}mv_0^2$$

Vi ser altså at beregnet energitap er vesentlig større enn virkelig energitap! Hva kan feilen være?

Feilen skyldes at sylinderen beveger seg framover både ved skliing og rulling i den perioden skliingen foregår. Det er derfor ikke riktig å bruke uttrykket for s som vi fant ovenfor, siden denne s-en har bidrag både fra skliing og den stadig voksende rotasjonen etter som sylinderen sklir bortover. Hadde vi trukket fra rulle-bidraget til s, ville vi fått samsvar mellom arbeid som friksjonskraften har utført på sylinderen og det energitapet sylinderen hadde i skliperioden.

Mer kompliserte tilfeller

Vi har hittil sett på de mest basale effektene knyttet til skliing/rulling-problematikken, men det er et vell av variasjonsmuligheter. De fleste av disse kan løses på lignende måte som ovenfor. Vi skal kort skissere hvordan vi kan gå fram dersom man støter til sylinderen i en annen høyde enn den vi brukte ovenfor.



Figuren viser tre ulike høyder vi kan treffe sylinderen i under selve støtet. Bare støtkraften er inntegnet, siden det er den som dominerer i støtfasen.

Ligningsettene vi har tilgjengelig er i prinsippet som før, men treffer støtet over eller under midtpunktet, vil selve støtet nå gi en "rotasjonsimpuls" som vil føre til at sylinderen har både en translatorisk og rotasjons-hastighet *like etter* støtet. Deretter vil ligningsettet bli som ovenfor (men korrigert for "initialbetingelsene" som eksisterer like etter støtet).

La oss se på støtfasen på ny. Siden massesentersatsen ikke tar hensyn til hvor på legemet en kraft blir anvendt, blir denne ligningen identisk med den vi hadde ovenfor:

$$\int_{\text{støt}} \Sigma\vec{F}dt = \int m\vec{a}_{cm} = m(\vec{v}_0 - \vec{v}_i)$$

Oppintegrering av spinnsatsen gir også som tidligere:

$$\int_{\text{støt}} \Sigma\vec{\tau}dt = I\int d\vec{\omega} = I(\omega_0 - \omega_i)$$

men nå kan vi gjøre litt ut av venstresiden. Kraftmomentet som virker på kula i støtprosessen vil nå nemlig bestå av samme kraften F som ovenfor, men nå med effektiv arm lik h (avstand mellom virkelinjen og aksen). Følgelig kan vi skrive:

$$\int_{\text{støt}} \Sigma\tau dt = \int_{\text{støt}} \Sigma F h dt = h\int_{\text{støt}} \Sigma F dt$$

Det siste integralet kjenner vi igjen fra oppintegreringen av massesentersatsen, og vi kan derfor kombinere alle de tre siste ligningene for å få én ligning:

$$hm(v_0 - v_i) = I(\omega_0 - \omega_i)$$

Denne ligningen gir oss en forbindelse mellom endring i translatorisk hastighet og endring i rotasjonshastighet ved et støt. Igjen så står i-indeksen for verdiene like før støtet, og 0-indeksen for tilstanden like etter støtet. Vi merker oss bl.a. at dersom sylinderen lå i ro før støtet, vil sylinderen like etter støtet rotere i motsatt retning for $h>0$ sammenlignet med $h<0$.

Siden sylinderen vil få en positiv rotasjonshastighet like etter et støt hvor h>0, kan vi undre oss på om det er mulig å få korrekt forhold mellom translatorisk og rotasjonshastighet for ren rulling, helt fra like etter støtet er over. I så fall må $\omega_0 r = v_0$. Dersom sylinderen lå i ro før støtet, vil det medføre at:

$$hmv_0 = I\omega_0 = I\frac{v_0}{r}$$

Setter vi inn for treghetsmomentet for sylinderen, får vi:

$$hmv_0 = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{v_0}{r}$$

$$h = \frac{r}{2}$$

Dette er høyst mulig å oppnå! Det betyr at dersom vi gir støtet i $h=r/2$ vil sylinderen rulle helt fra støtet er over.

Treffer man over denne høyden, vil sylinderen rulle for fort i forhold til den translatoriske bevegelsen. Da vil den translatoriske farten øke og rotasjonshastigheten avta inntil ren rulling kan oppnås. I det tilfellet vil friksjonskraften peke framover i stedet for bakover som vi har ansett riktig hittil.

Sluttkommentar

Vi har hittil basert oss på å løse rotasjonsdynamiske oppgaver ved hjelp av massesentersatsen og spinnsatsen sammen med geometriske føringer. Dersom dere leser løsningsforslag fra tidligere år, vil dere se at man der ofte bruker et triks ved å betrakte spinnet om kontaktpunktet mellom sylinder (eller kule) og underlaget. Vi har ikke i FYS-MEK/F-sammenheng vist at man kan gjøre dette. Vi har derfor heller ikke vist i hvilke sammenhenger vi faktisk kan bruke et slikt bevegelig, akselerert punkt som utgangspunkt for spinnsatsen. Da er det skummelt å anvende en slik løsningsmetode, siden man da lett kan komme ut for tilfeller der dette trikset ikke er gyldig lenger. Når man har en (tenkt) akse som ligger fast, er det imidlertig ikke noe problem med å bruke spinnsatsen omkring dette punktet.

Jeg vil også nevne at man i enkelte oppgaver må til med energibetraktninger i stedet for spinnsats og massesentersats. Det er som med den vanlige dynamikken, at av og til lønner det seg starte med Newtons 2. lov og andre ganger lønner det seg å starte med energibevaring. Ofte er det slik at energibetraktninger kan ha et fortrinn dersom man ikke spør om tidsavhengighet, men det må man forsøke å danne seg et bilde av ut fra oppgaveformuleringene som er gitt.

Lykke til!

PS: Dette skrivet er ikke korrekturlest, og har derfor sikkert mange feil og litt håpløse setninger. Jeg håper du aksepterer det så lenge notatet bare er skrevet som en mulig ekstra hjelp for å forstå hvordan man kan ressonere ved oppgaver i rotasjonsdynamikk.

Legg spesielt merke til at jeg foretrekker å starte med basisligningene, og ikke lete vilt etter “en eller annen formel som kanskje kan brukes”. Mange er vant til å gå på “formel-jakt” fra videregående skole, men hos oss er ressonementene og grunnforståelsen så viktig at man bør fokusere på dette. Som nevnt før får man ikke full uttelling dersom man bare kan finne en formel og sette korrekt inn, selv om svaret er korrekt. Men riktig svar er selvfølgelig bedre enn galt svar, - og får man til begrunnelsene i tillegg, er det strålende!