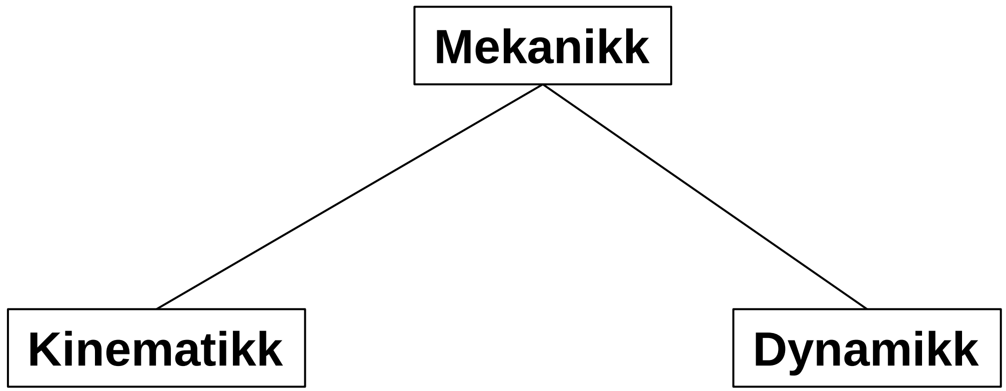
Bevegelse i én dimensjon

17.01.2013

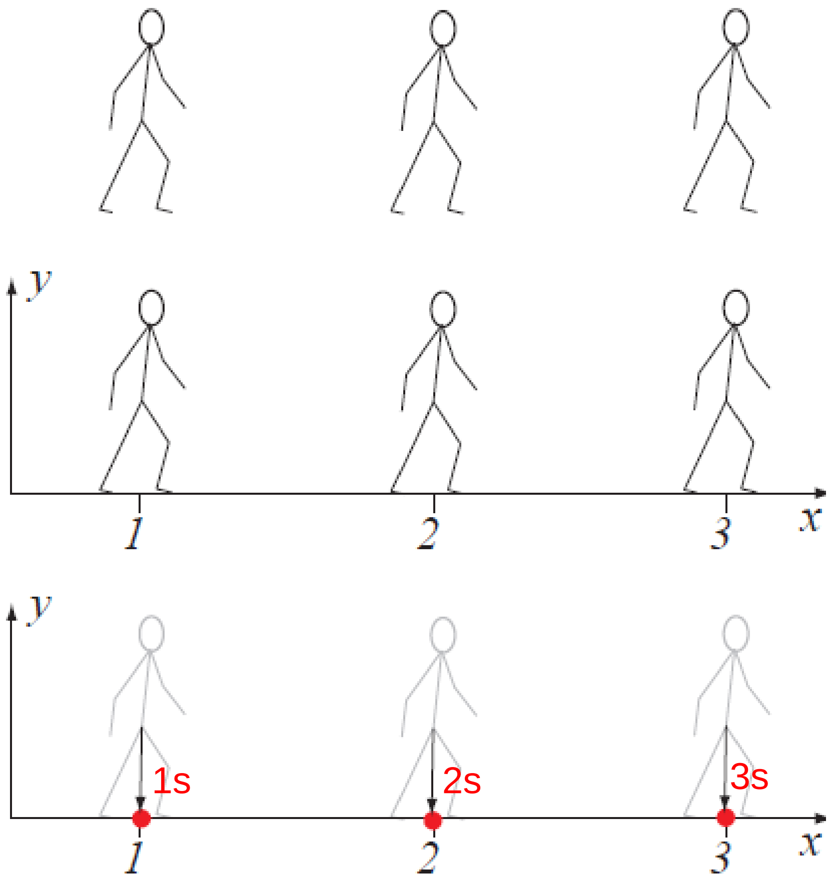
Forelesningsplan:
http://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS-MEK1110/v13/plan2013.htm



læren om bevegelser uten å ta hensyn til bevegelsens årsak

læren om krefter som endrer et legemets bevegelse

Hvordan kan vi beskrive en bevegelse?



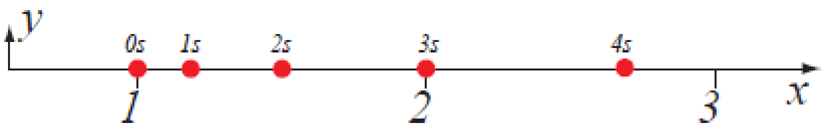
vi må kvantifisere posisjon

vi må også kvantifisere tidsskala

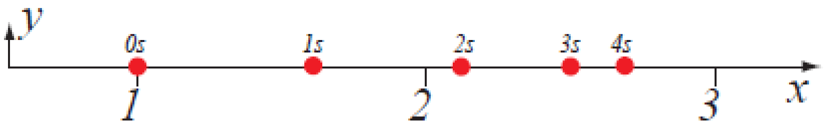
Bevegelsesdiagram

Bevegelsesdiagrammer

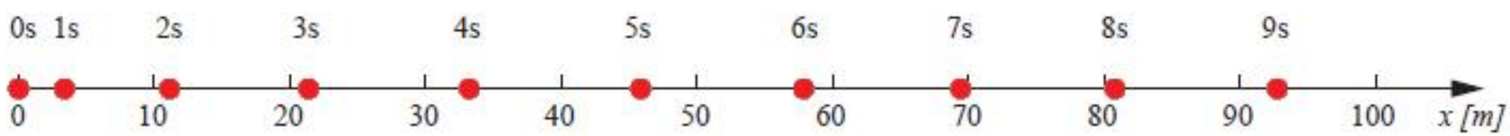
hvis jeg går fortere...



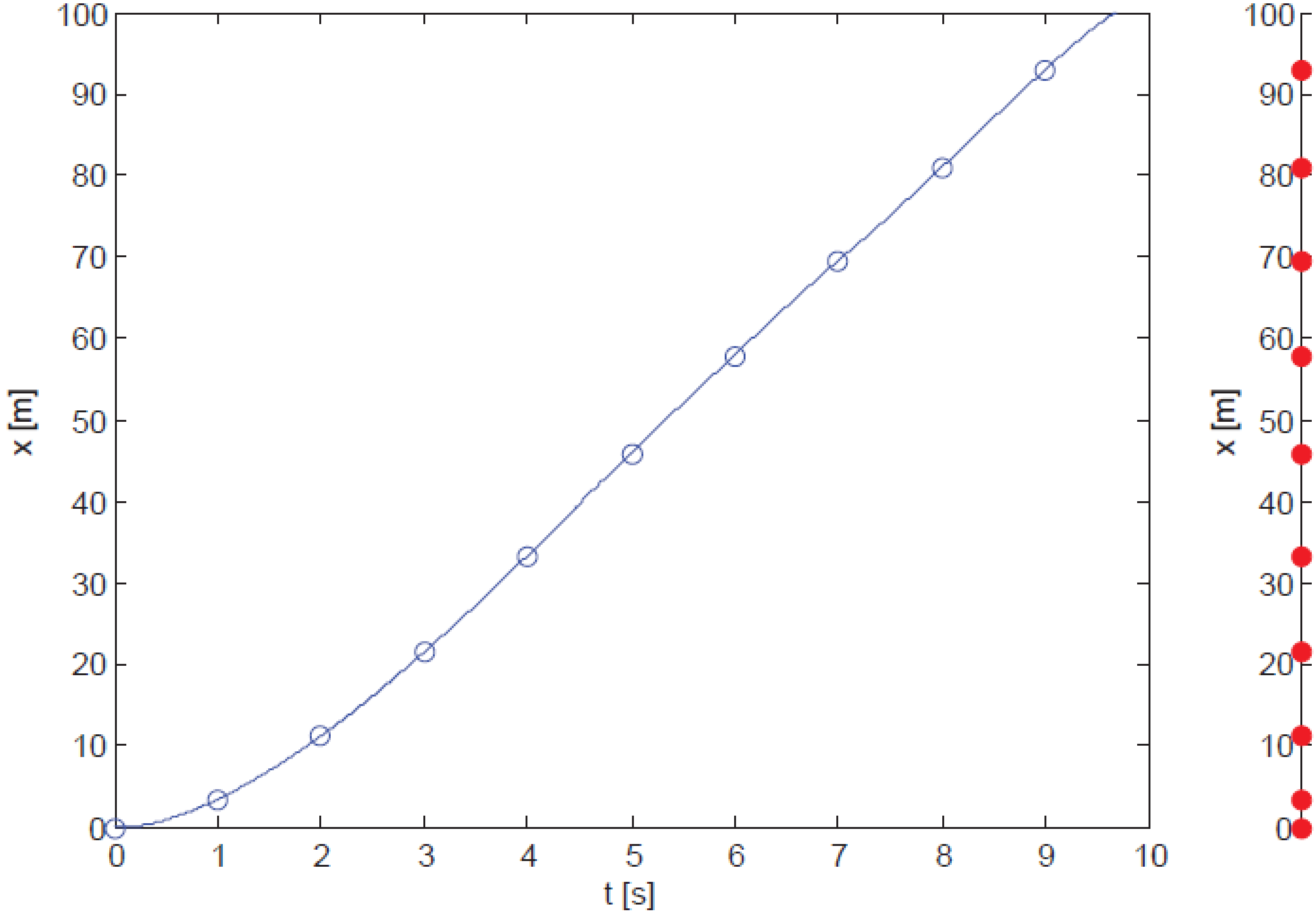
hvis jeg går saktere...



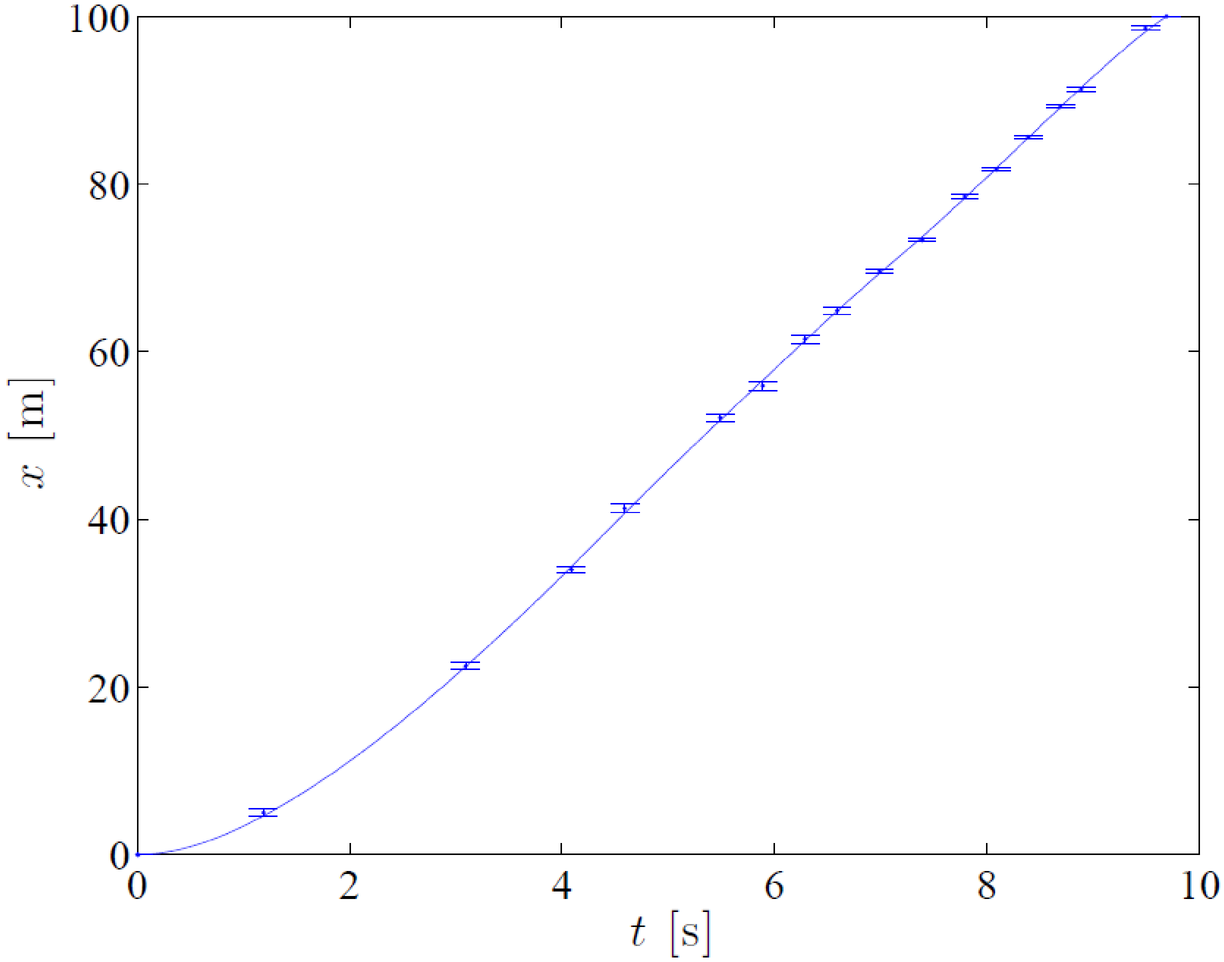
OL-finalen i 100m i Beijing 2008



Posisjonen til Usain Bolt som funksjon av tiden

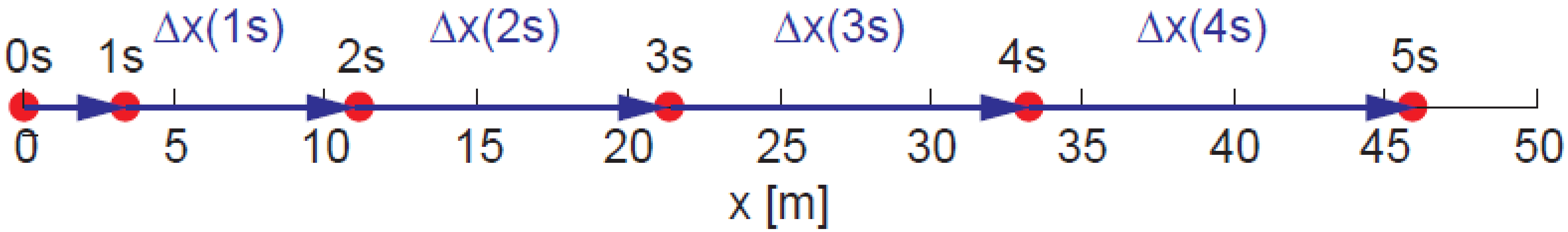


Målefeil



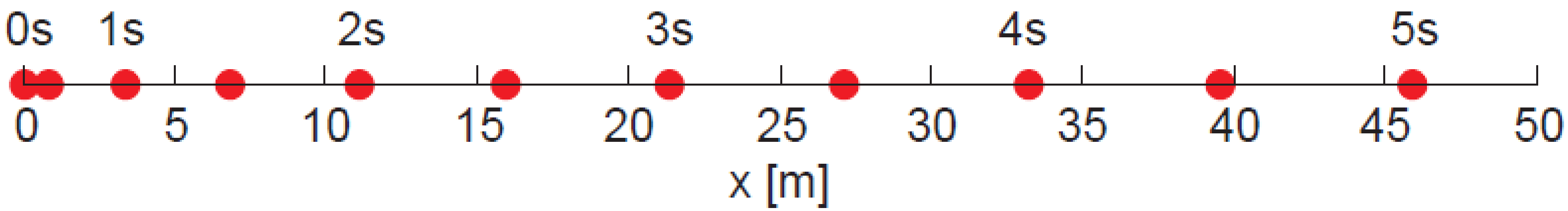
Hver måling har feilmarginer.

Bevegelsesdiagram til Usain Bolt



Forandringen fra et punkt til et neste kalles forflytning: $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$

Forflytningen er uavhengig av valg av origo, men er avhengig av tidsintervallet.

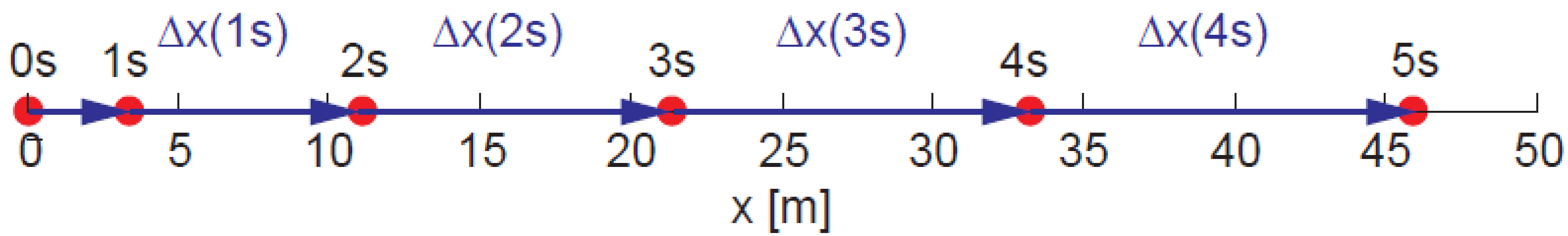


Vi definerer gjennomsnitts- eller middelhastighet fra t_i til $t_i + \Delta t$

$$\bar{v}(t_i) = \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}$$

Den har benevning m/s – meter per sekund.

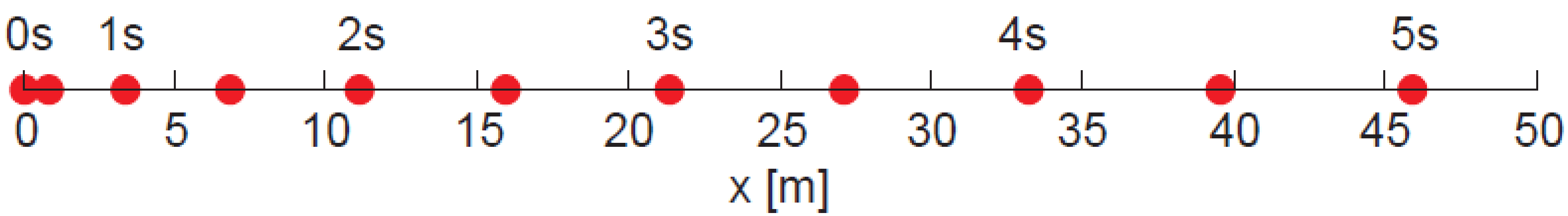
Middelhastighet



$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(2.0\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{7.7\text{m}}{1.0\text{s}} = 7.7\text{m}/\text{s}$$

$$\bar{v}(2.0\text{s}) = \frac{x(3.0\text{s}) - x(2.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{10.2\text{m}}{1.0\text{s}} = 10.2\text{m}/\text{s}$$

Middelhastigheten øker.



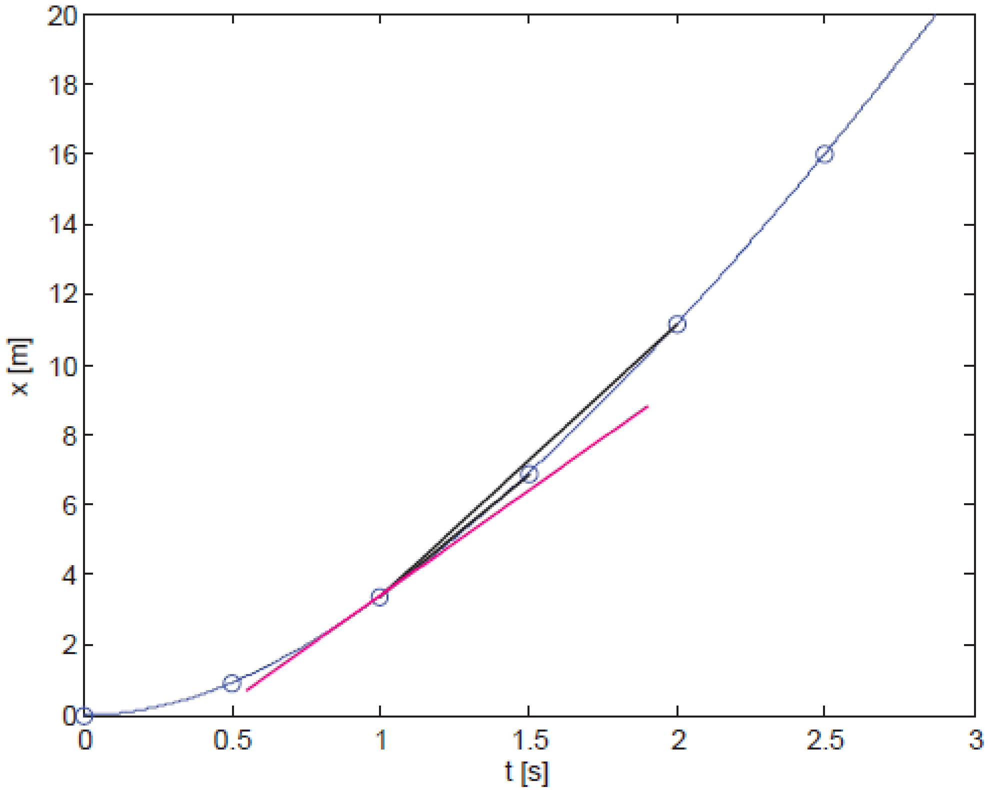
$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(1.5\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{3.5\text{m}}{0.5\text{s}} = 7.0\text{m}/\text{s}$$

$$\bar{v}(2.0\text{s}) = \frac{x(2.5\text{s}) - x(2.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{4.9\text{m}}{0.5\text{s}} = 9.8\text{m}/\text{s}$$

Middelhastigheten er avhengig av tidsintervallet.

Det blir viktig når vi analyserer bevegelser numerisk: Tidsintervaller må være tilpasset!

Posisjonen til Usain Bolt



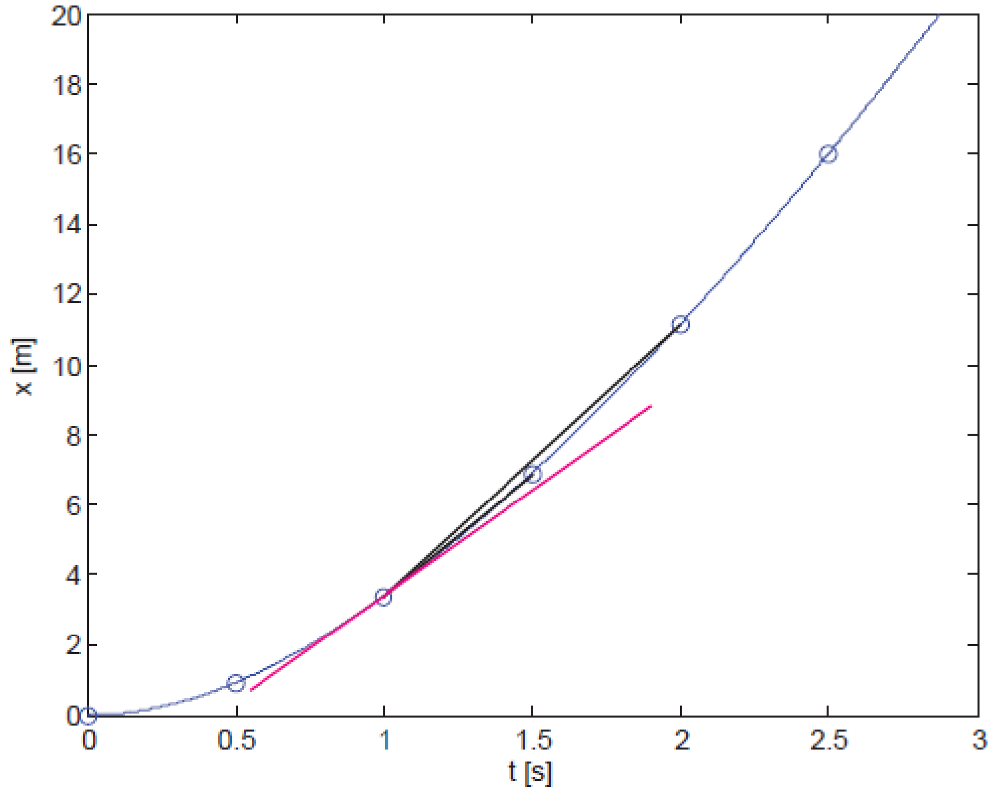
$$\bar{v}(1.0\mathrm{s}) = \frac{x(2.0\mathrm{s}) - x(1.0\mathrm{s})}{\Delta t} = 7.7\mathrm{m/s}$$

$$\bar{v}(1.0\mathrm{s}) = \frac{x(1.5\mathrm{s}) - x(1.0\mathrm{s})}{\Delta t} = 7.0\mathrm{m/s}$$

Middelhastighet kan tolkes som stigningstall til kurven.

$$\bar{v}(t_i) = \frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t}$$

Posisjonen til Usain Bolt



$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(2.0\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = 7.7\text{m/s}$$

$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(1.5\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = 7.0\text{m/s}$$

v(1.0s) = 6.1 m/s

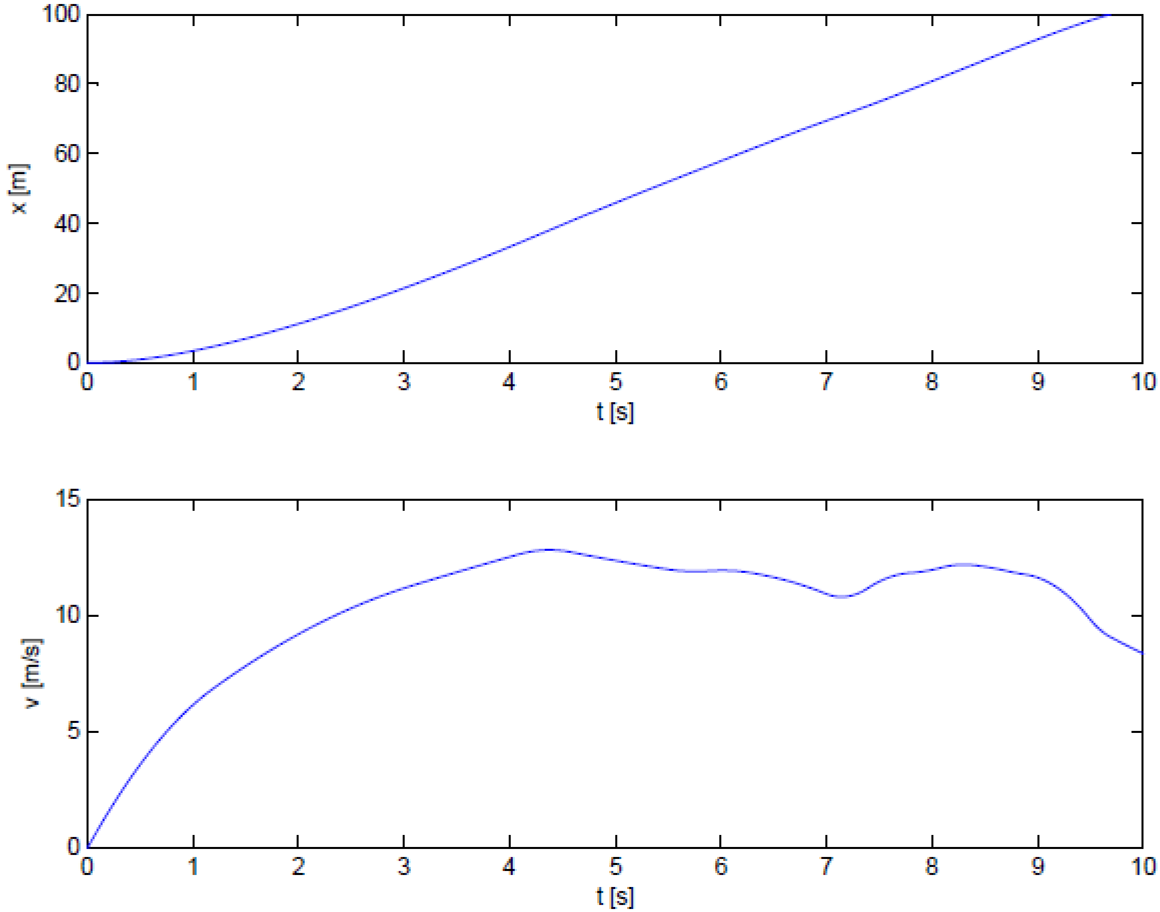
v(1.5s) = 7.8 m/s

Hvis vi bruker kortere og kortere tidsintervaller:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

(Momentan)-hastighet

Vi finner hastighet for hvert tidspunkt ved derivasjon:



Hastigheten øker kraftig og er mer eller mindre konstant etterpå.
Forandringen i hastighet beskriver vi med akselerasjonen.

Akselerasjon

Gjennomsnitts- eller middelakselerasjon: $\bar{a}(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

obs.: her bruker vi momentanhastigheten

(Momentan) akselerasjon:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

For tidsderiverte bruker vi også 'dot' notasjonen:

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Integrasjon av hastighet

$$\text{posisjon} \; \underset{\text{integrasjon}}{\overset{\text{derivasjon}}{\rightleftarrows}} \; \text{hastighet}$$

Vi kjenner $v(t)$ – finn $x(t)$ når $x(t_0) = x_0$

Definisjon av hastighet: $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} dt = x(t) - x(t_0)$$

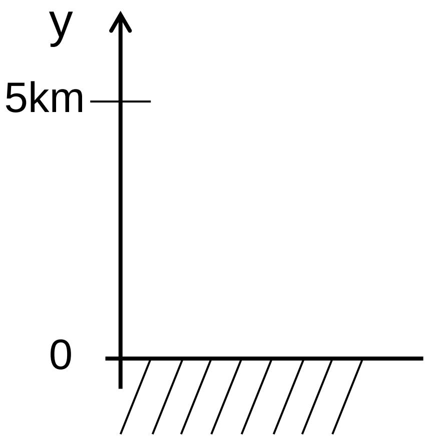
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Det holder ikke å kjenne hastigheten alene,
vi må også kjenne minst én posisjon:
$\Rightarrow$ integrasjonskonstant

Vi kan integrere hastigheten
enten analytisk eller numerisk.

Eksempel: Fallskjermhopp

Du hopper i fallskjerm og trekker i snoren når du er 5000m over bakken.
Deretter faller du med konstant hastighet på 20m/s.
Hvor lang tid tar det før du treffer bakken?



Vi definerer et koordinatsystem:
Vi måler høyden i y retning fra bakken ved y=0.

Vi finner initialbetingelsene:
Ved tiden $t_0 = 0$ er posisjonen $y(0) = y_0 = 5000$ m.

Du beveger deg med konstant hastighet $v_0 = -20$ m/s.
(Fortegnet er negativ fordi du faller i negativ y-retning.)

Vi finner *y*(t) ved integrasjon: $$v(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$y(0) = y_0 = 5000\,\mathrm{m}$$
$$v(t) = v_0 = -20\ \mathrm{m/s}$$

$$\int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{dy}{dt}\,dt$$

$$v_0 \int_0^t dt = \int_{y(0)}^{y(t)} dy$$

$$v_0 t = y(t) - y_0$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t = 5000\,\mathrm{m} - 20\ \mathrm{m/s}\ t$$

Du treffer bakken når $y(t)$ = 0: $$y(t) = 5000\,\mathrm{m} - 20\ \mathrm{m/s}\ t = 0$$

$$t = \frac{-5000\ \mathrm{m}}{-20\ \mathrm{m/s}} = 250\ \mathrm{s}$$

Du treffer bakken etter 250 s.

Bevegelsesligninger

Vi vil snart studere sammenhengen mellom kraft og akselerasjon:
Newtons andre lov: $F = m\,a$

Vi er ofte i en situasjon der vi kjenner akselerasjonen fordi vi kjenner kraften.

Er bevegelsen da fullstendig karakterisert?

Bevegelsesligninger

Vi starter fra definisjonen av akselerasjonen: $$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,dt = v(t) - v(t_0)$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Gitt *a*(*t*) og *v*(t_0) kan vi finne *v*(*t*).

Vi integrerer hastigheten for å finne posisjonen: $$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right) dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Bevegelsesligninger

Vi vil snart studere sammenhengen mellom kraft og akselerasjon:
Newtons andre lov: $F = m\,a$

Vi er ofte i en situasjon der vi kjenner akselerasjonen fordi vi kjenner kraften.

Er bevegelsen da fullstendig karakterisert?

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Vi kan finner hastigheten og posisjonen som funksjon av tiden dersom vi kjenner akselerasjonen $a(t)$ og initialbetingelsene v_0 og x_0.

Generell løsningsmetode

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi?
Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Løs:

Løs bevegelsesligningen.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Analyser:

Er resultatene for $x(t)$ og $v(t)$ fornuftig?
.

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

Denne oppskriften kommer vi å bruke mye.

Bevegelsesligningene: $$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\, dt\, dt$$

Spesielle tilfeller:

ingen akselerasjon:

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v(t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0)$$

konstant akselerasjon:

$$a(t) = a_0$$

$$v(t) = v(t_0) + a_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + a_0 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} dt\, dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$