Bevegelse i én dimensjon (2)

22.01.2013

Bevegelsesligninger

Vi starter fra definisjonen av akselerasjonen: $a(t) = \frac{dv}{dt}$

$$\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,dt = v(t) - v(t_0) \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Vi integrerer hastigheten for å finne posisjonen: $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right) dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Vi kan finner hastigheten og posisjonen som funksjon av tiden dersom vi kjenner akselerasjonen $a(t)$ og initialbetingelsene v_0 og x_0. Integrasjon utføres analytisk eller numerisk.

Generell løsningsmetode

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Løs:

Løs bevegelsesligningen

.
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Analyser:

Er resultatene for *x*(*t*) og *v*(*t*) fornuftig?
.

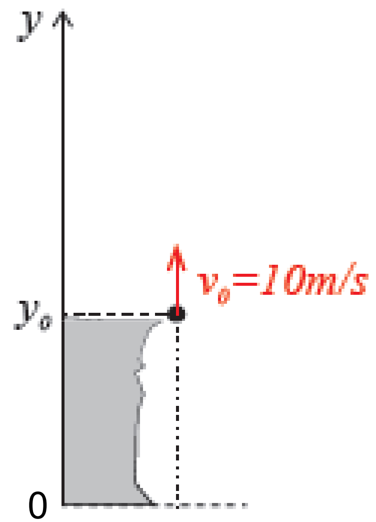
Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

Eksempel: bevegelse med konstant akselerasjon

Du står på en klippe og kaster en ball oppover fra en punkt 4 m over bakken med en hastighet av 10 m/s. Tyngdeakselerasjon er g = 9.8 m/s^2.

a) Hva er maksimale høyden til ballen?
b) Hvor lang tar det for å treffe bakken?



Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Først lage vi en tegning og definere koordinatsystemet.

Initialbetingelser:

$$y(t_0) = 4\ \mathrm{m}$$

$$v(t_0) = 10\ \mathrm{m/s}$$

Vi kaster ballen ved tiden t_0 = 0 s.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Ballen er påvirket av tyngdeakselerasjon, som virker nedover mot bakken og er konstant med g = 9.8 m/s^2.

Vi ser bort fra andre krefter som påvirker ballen, f. eks. luftmotstand.

Vi velger et forenkelt modell; resultatene er tilnærminger.

$$a(t) = a_0 = -g = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Vi må løse differensialligningen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t) = a_0 = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

Vi velger å gjøre det analytisk
fordi det er enkelt med konstant akselerasjon.

Vi integrerer akselerasjonen for å få hastigheten:

$$v(t) - v(t_0) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t (-g)dt$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

Vi integrerer hastigheten for å få posisjonen:

$$y(t) - y(t_0) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0 - gt)dt$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_0 dt - \int_0^t gtdt = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Analyser:

Er resultatene for
$x(t)$ og $v(t)$ fornuftig?
.

Bruk resultatene for
a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0 \; ; \quad y(0) = y_0$$

Hva er maksimale høyden til ballen?

Du kaster ballen oppover, men gravitasjonen trekker ned.
I det høyeste punktet må hastigheten være null.

Matematisk: Funksjonen $y(t)$ har et ekstremverdi for $\frac{dy}{dt} = v(t) = 0$

For hastigheten har vi funnet: $v(t) = v_0 - gt$

Ballen kommer til den høyeste punkt ved tid t_1

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0\ \mathrm{m/s}$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

For høyden har vi funnet: $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Ved tid t_1 er høyden: $y(t_1) = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$

$$y(t_1) = y_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

$$y(t_1) = 4\ \mathrm{m} + \frac{1}{2}\frac{(10\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{m/s}^2} \approx 9.1\ \mathrm{m}$$

Den maksimale høyden til ballen er 9.1 m.

Hvor lang tar det for å treffe bakken?

Ballen treffer på bakken (y=0) ved tid t_2:

$$y(t_2) = y_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0\,\mathrm{m}$$

Vi må løse en andregradsligning:

$$t_2^2 - \frac{2v_0}{g} t_2 - \frac{2y_0}{g} = 0$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}$$

$$t_2 = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{10\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}\right)^2 + 2\frac{4\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Vi får to løsninger: $t_2 = 2.38$ s eller $t_2 = -0.34$ s.

Vi har startet klokken ved ballkast;
bare den positive løsningen er meningsfylt.

Ballen treffer på bakken 2.38 s etter kastingen.

Numerisk integrasjon:

Akselerasjon er definert som:

$$a(t_i) = \lim_{\Delta t} \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t} \simeq \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t} = \bar{a}(t_i)$$ hvis Δt er små

$$v(t_i + \Delta t) - v(t_i) = \Delta t \cdot \bar{a}(t_i) \simeq \Delta t \cdot a(t_i)$$

$$v(t_i + \Delta t) \simeq v(t_i) + a(t_i) \cdot \Delta t$$

Gitt at vi kjenner $a(t)$ og hastighet $v(t_0)$, så kan vi gå framover i tiden og finner hastighet ved alle tider:

$$v(t_1) = v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + a(t_0)\,\Delta t$$
$$v(t_2) = v(t_1 + \Delta t) = v(t_1) + a(t_1)\,\Delta t$$
$$\ldots$$

Tilsvarende finner vi posisjonen fra hastigheten:

$$v(t_i) = \lim_{\Delta t} \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} \simeq \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} = \bar{v}(t_i)$$

$$x(t_i + \Delta t) - x(t_i) = \Delta t \cdot \bar{v}(t_i) \simeq \Delta t \cdot v(t_i)$$

$$x(t_i + \Delta t) \simeq x(t_i) + v(t_i) \cdot \Delta t$$

Vi har funnet en metode for å finne $x(t)$ og $v(t)$ hvis vi kjenner:

- akselerasjonen: $a(t)$
- initialbetingelser: $x(t_0)$, $v(t_0)$

Leonhard Euler
(1707–1783)

Euler metode:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i + \Delta t) \approx v(t_i) + a\big(t_i, x(t_i), v(t_i)\big)\Delta t$$
$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) \approx x(t_i) + v(t_i)\,\Delta t$$

Vi må bruke små Δt og mange skritt for å nå en god presisjon.

Vi kan redusere feilen med en liten forbedring:
Istedenfor hastigheten i begynnelsen av tidsintervallet bruke vi hastigheten på slutten for å finne posisjonen.

Euler-Cromer metode:

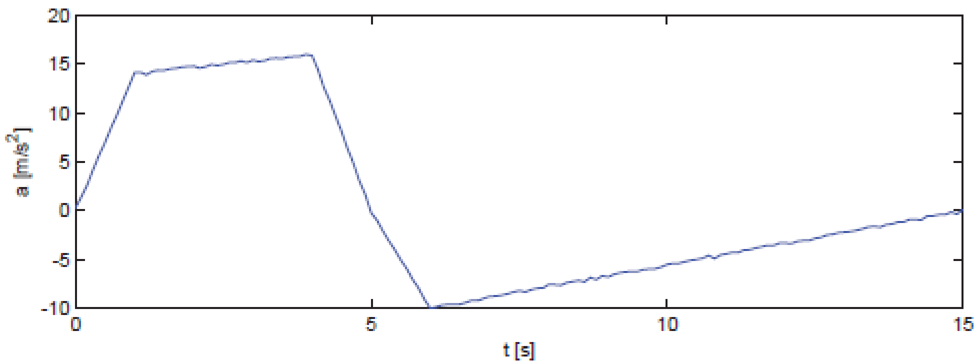
$$v(t_{i+1}) = v(t_i + \Delta t) \approx v(t_i) + a\big(t_i, x(t_i), v(t_i)\big)\Delta t$$
$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta t) \approx x(t_i) + v(t_i + \Delta t)\,\Delta t = x(t_i) + v(t_{i+1})\,\Delta t$$

Eksempel for numerisk integrasjon:

Du utvikler ”The Rocket”, en ny attraksjon ved en fornøyelsespark.

Du har festet et akselerometer til en test-vogn for å finne hastigheten og posisjonen.

Dette er målingen din:



t [s]	a [m/s²]
0.0	0.27
0.1	1.44
0.2	2.67
0.3	4.24
0.4	5.65
0.5	6.95
0.6	8.42
0.7	9.74
0.8	11.20
0.9	12.64
1.0	14.11

Vi kjenner akselerasjonen $a(t_i)$ for t_i = 0.0s, 0.1s, 0.2s, ...
Du kjenner initialbetingelser: ”The Rocket” starter i ro:
$x(t_0) = x_0 = 0\text{m}$, $v(t_0) = v_0 = 0\text{m/s}$

Vi bruker Euler metoden med tidsskritt Δt = 0.1s:

$$v(t_i + \Delta t) = v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + a(t_i)\,\Delta t$$

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + v(t_i)\,\Delta t$$

Euler metode

$$v(t_i + \Delta t) = v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + a(t_i)\,\Delta t$$
$$x(t_i + \Delta t) = x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + v(t_i)\,\Delta t$$

$$t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$$
$$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$$
$$v(t_0) = v(0.0\,\mathrm{s}) = 0.0\,\mathrm{m/s}$$
$$x(t_0) = x(0.0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$$
$$v(0.1\,\mathrm{s}) = v(0.0\,s) + a(0.0\,s)\,\Delta t = 0.0\,\mathrm{m/s} + 0.27\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.03\,\mathrm{m/s}$$
$$x(0.1\,\mathrm{s}) = x(0.0\,s) + v(0.0\,s)\,\Delta t = 0.0\,\mathrm{m} + 0.0\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.0\,\mathrm{m}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 0.2\,\mathrm{s}$$
$$v(0.2\,\mathrm{s}) = v(0.1\,s) + a(0.1\,s)\,\Delta t = 0.03\,\mathrm{m/s} + 1.44\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.17\,\mathrm{m/s}$$
$$x(0.2\,\mathrm{s}) = x(0.1\,s) + v(0.1\,s)\,\Delta t = 0.0\,\mathrm{m} + 0.03\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.003\,\mathrm{m}$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t = 0.3\,\mathrm{s}$$
$$v(0.3\,\mathrm{s}) = v(0.2\,s) + a(0.2\,s)\,\Delta t = 0.17\,\mathrm{m/s} + 2.67\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.44\,\mathrm{m/s}$$
$$x(0.3\,\mathrm{s}) = x(0.2\,s) + v(0.2\,s)\,\Delta t = 0.003\,\mathrm{m} + 0.17\,\mathrm{m/s^2}\;0.1\,s = 0.02\,\mathrm{m}$$

t [s]	a [m/s^2]
0.0	0.27
0.1	1.44
0.2	2.67
0.3	4.24
0.4	5.65
0.5	6.95
0.6	8.42
0.7	9.74
0.8	11.20
0.9	12.64
1.0	14.11

Metoden er slitsomt for oss mel lett å programmere.

```
load -ascii therocket.dat
t = therocket(:,1);
a = therocket(:,2);
dt = t(2) - t(1);
n = length(t);
v = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
for i = 1:n-1
    v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i)*dt;
end
subplot(3,1,1)
plot(t,x)
xlabel('t [s]');
ylabel('x [m]');
subplot(3,1,2)
plot(t,v)
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]');
subplot(3,1,3)
plot(t,a)
xlabel('t [s]');
ylabel('a [m/s^2]');
```

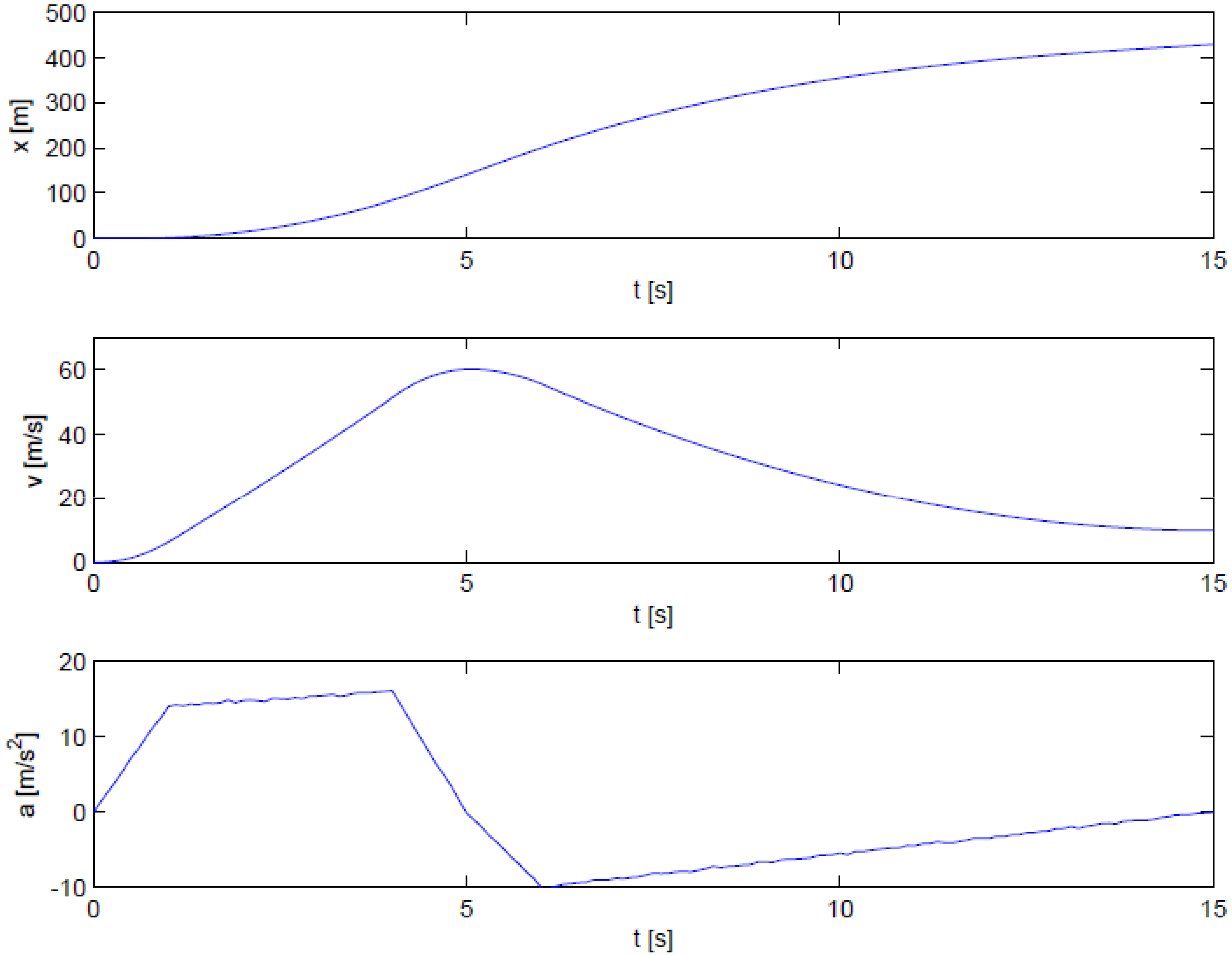
ascii fil ”therocket.dat”

0.0	0.27
0.1	1.44
0.2	2.67
0.3	4.24
0.4	5.65
0.5	6.95
...	...

”arrays”:
therocket: ($n \times 2$) matrise
t, *a*, *v*, *x*: ($n \times 1$) matriser

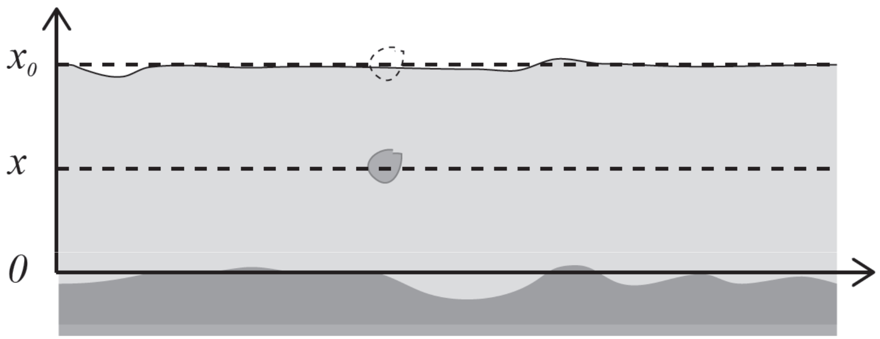
alltid husk label og enhet

Eksempel: "The Rocket"



Eksempel: sandkorn i vannet

Et sandkorn synker i vann med akselerasjon $a(t) = -a_0 - cv(t)$,
hvor $a_0 = 6.2\ \text{m/s}^2$ og $c = 1.8\ \text{s}^{-1}$.
Hvor lang tid tar det for å synke fra overflaten til bunnen på 2 m dybde?



initialbetingelser:

$$x(t_0) = x_0 = 2\,\text{m}$$
$$v(t_0) = v_0 = 0\,\text{m/s}$$
$$t_0 = 0\,\text{s}$$

Vi kjenner akselerasjonen: $a(t) = -a_0 - cv(t)$

Vi må løse differensialligningen: $$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_0 - c\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -a_0 - cv$$

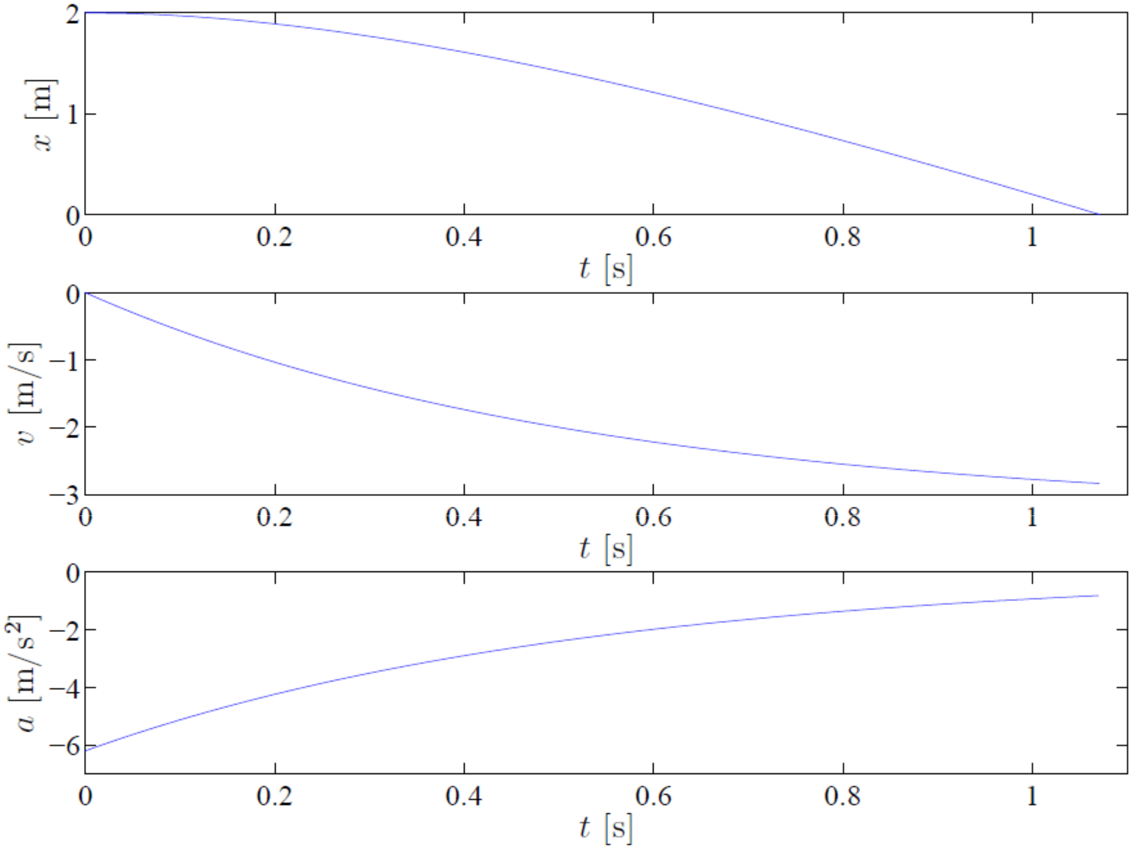
Numerisk løsning med Euler metode:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(t_i)\,\Delta t$$
$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + v(t_i)\,\Delta t$$

```
a0 = 6.2; % m/s^2
c = 1.8; % s^-1
time = 2.0; % s
dt = 0.001; % s
n = ceil(time/dt);
t = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
a = zeros(n,1);
x(1) = 2.0; % m
t(1) = 0.0; % s
v(1) = 0.0; % m/s
i = 1;
while (i<n-1)&&(x(i)>0.0)
  a(i) = -a0 -c*v(i);
  v(i+1) = v(i) + dt*a(i);
  x(i+1) = x(i) + dt*v(i);
  t(i+1) = t(i) + dt;
  i = i + 1;
end
```

```
printf ("t=%f  x(t)=%f\n",t(i),x(i));
subplot(3,1,1)
plot(t(1:i),x(1:i))
xlabel('t [s]')
ylabel('x [m]')
subplot(3,1,2)
plot(t(1:i),v(1:i))
xlabel('t [s]')
ylabel('v [m/s]')
subplot(3,1,3)
plot(t(1:i-1),a(1:i-1))
xlabel('t [s]')
ylabel('a [m/s^2]')
```

Resultater og interpretasjon:



Sandkornet treffer bunnen etter 1.053 s.

Hastigheten nedover øker rask og går mot en konstant verdi etterpå.

$$a(t) = -a_0 - cv(t)$$

Akselerasjon nedover blir mindre fordi friksjonen øker med hastighet. Akselerasjonen går mot null.

”The Rocket”:

Vi kjenner *a*(*t*) for diskrete tidspunkter fra malinger som vi leser fra en datafil. Tidsskritt er bestemt fra målingen.

```
load -ascii therocket.dat
t = therocket(:,1);
a = therocket(:,2);
dt = t(2) - t(1);
n = length(t);
v = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
for i = 1:n-1
    v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i)*dt;
end
```

Sandkorn i vannet:

Vi kjenner funksjonen *a*(*t*) fra et modell. Vi må beregner $a(t_i)$ for hver tidsskritt. Vi kan velge tidsskritt Δt.

```
dt = 0.001; % s
n = ceil(time/dt);
t = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
a = zeros(n,1);
x(1) = 2.0; % m
t(1) = 0.0; % s
v(1) = 0.0; % m/s
i = 1;
while (i<n-1)&&(x(i)>0.0)
  a(i) = -a0 -c*v(i);
  v(i+1) = v(i) + dt*a(i);
  x(i+1) = x(i) + dt*v(i);
  t(i+1) = t(i) + dt;
  i = i + 1;
end
```

Siden vi kjenner funksjonen *a*(*t*), kan vi løse problemet analytisk?

analytisk:

$$a(t) = -a_0 - cv(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = -a_0 - cv$$

$$\frac{dv}{a_0 + cv} = -dt \qquad\qquad u = a_0 + cv$$

$$du = cdv$$

$$\frac{du}{u} = -cdt$$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = -\int_0^t cdt$$

$$\ln u(t) - \ln u(0) = \ln \frac{u(t)}{u(0)} = -ct$$

$$u(t) = a_0 + cv(t) = u(0)e^{-ct} = (a_0 + cv_0)e^{-ct}$$

$$v(t) = -\frac{a_0}{c} + (\frac{a_0}{c} + v_0)e^{-ct} \qquad\qquad t = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0$$

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{a_0}{c}$$ terminalhastighet

$$v(t) = -\frac{a_0}{c} + (\frac{a_0}{c} + v_0)e^{-ct} = -v_T + (v_T + v_0)e^{-ct}$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(-v_T + (v_T + v_0)e^{-ct}\right)dt$$

$$= -v_T t + (v_T + v_0)\int_0^t \left(e^{-ct}\right)dt$$

$$= -v_T t - \frac{(v_T + v_0)}{c}\left(e^{-ct} - 1\right)$$

$$x(t) = x_0 - v_T t - \frac{(v_T + v_0)}{c}\left(e^{-ct} - 1\right) \qquad t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 - 0 - \frac{(v_T + v_0)}{c}\left(1 - 1\right) = x_0$$

Vi har funnet en funksjon som beskriver posisjon,
men vi kan ikke løse ligningen $x(t) = 0$ analytisk.
(Vi kunne gjøre det numerisk.)