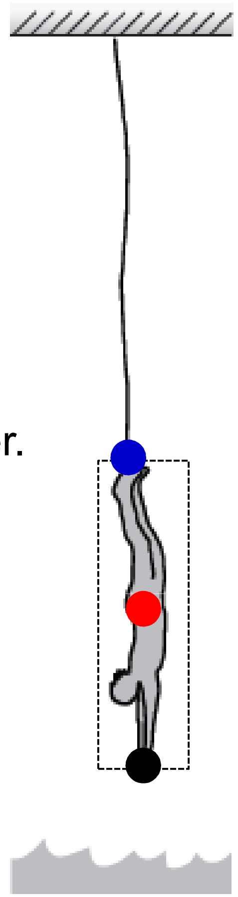
Newtons lover i én dimensjon (2)

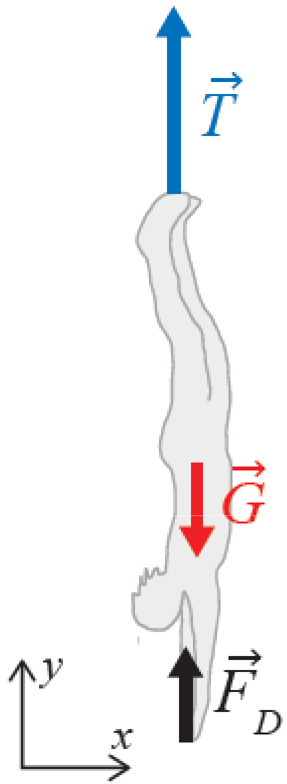
29.01.2013

husk: data lab fredag 10 - 16

Identifikasjon av kreftene:

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
7. Tegn objektet med skalerte krefter.
8. Tegn inn koordinatsystemet.





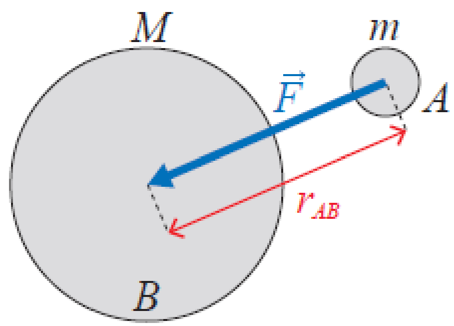
fri-legeme diagram

Newtons andre lov: $\vec{F}_{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$

summen av alle ytre krefter som påvirker objektet og har årsak i omgivelsen.

Kraftmodeller

Gravitasjon $$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^3} \vec{r}_{\text{AB}}$$



langtrekkende kraft

på jorden $$F = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^2} = mg \qquad g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

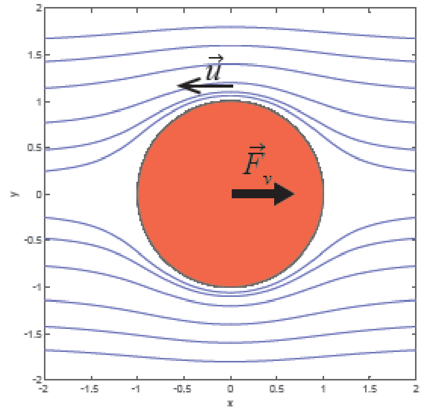
(rettet mot jordens senteret)

Kraftmodeller: viskøs kraft

- hastighetsavhengig
- empiriske modeller

viskøs kraft for små hastigheter

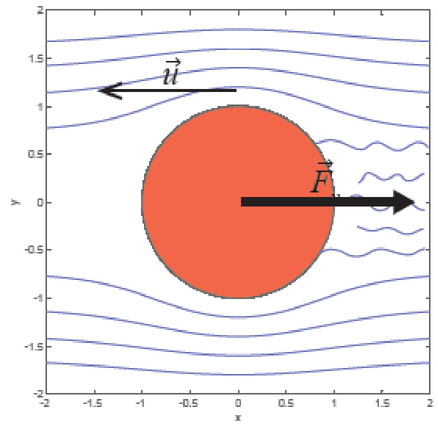
$$\vec{F}_D = -k_v \vec{v}$$



viskøs kraft for større hastigheter

$$F_D = -D v^2$$

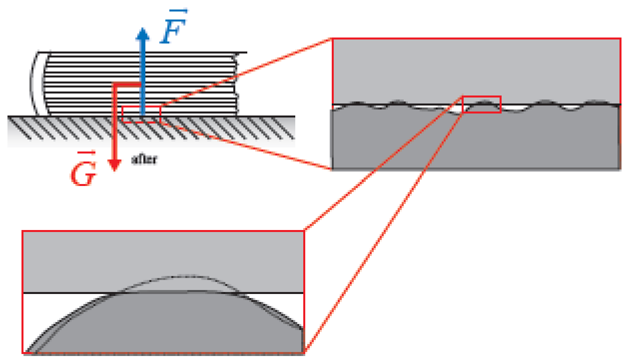
$$\vec{F}_D = -D \vec{v} |v|$$



Normalkraft

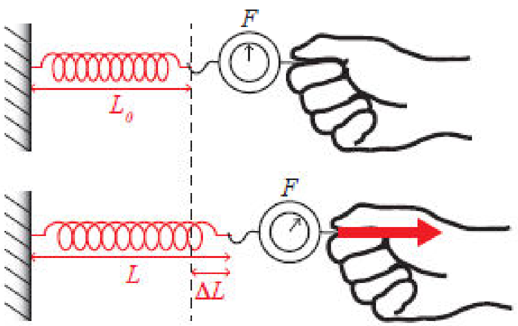
kontaktkraft mellom faststoff og væske
$\Rightarrow$ viskøs kraft avhengig av hastighet

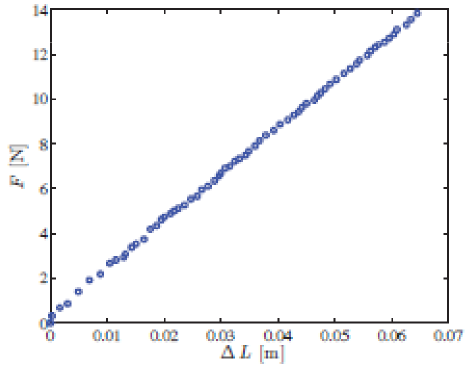
kontaktkraft mellom to faststoffer
$\Rightarrow$ relatert til deformasjon



Hvordan kan vi modellere deformasjonskrefter ?

Eksperiment: vi måler kraften som trengs for å strekke en fjær.





Vi finner en lineær sammenheng: $F = k\Delta L$ Det kalles fjærkraft.

De fleste materialer viser en lineær sammenheng
mellom kraft og deformasjon (hvis deformasjon er små).

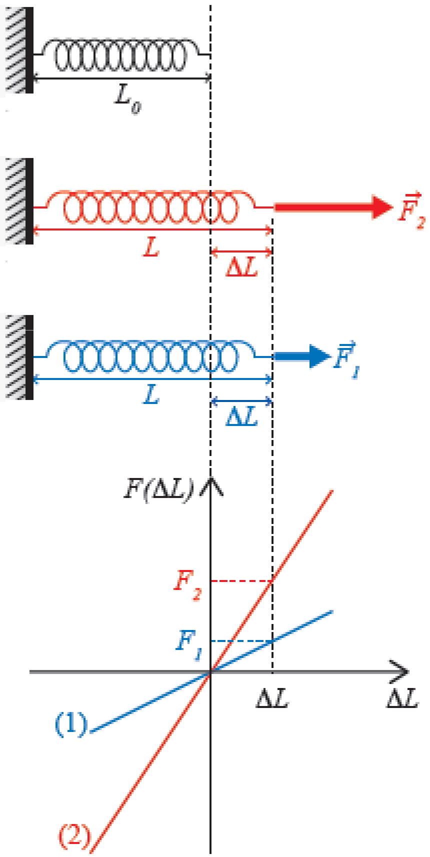
Fjærkraft $F = k\Delta L$ k: fjærkonstant

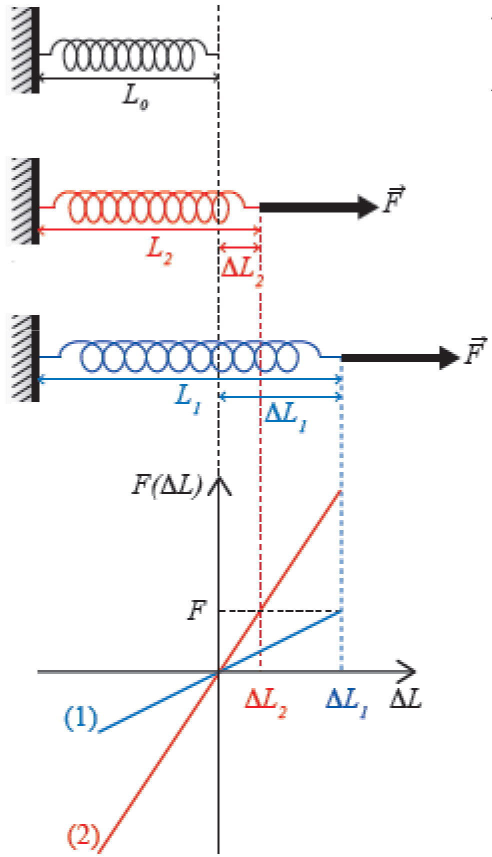
$\Delta L = L - L_0$ elongasjon

L_0: likevektslengde

stiv fjær

myk fjær



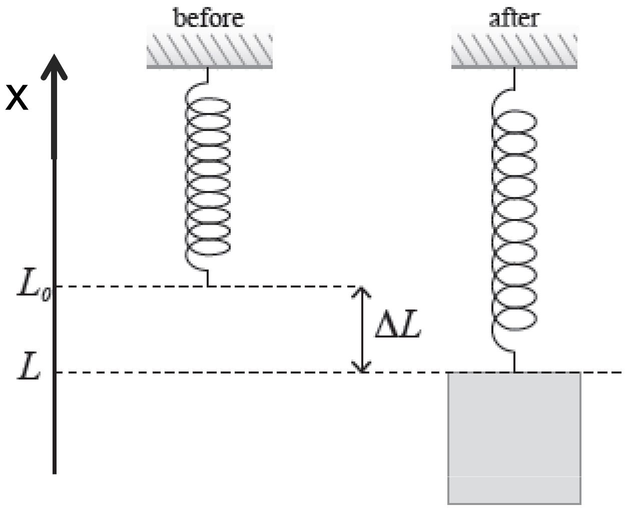


vi må passe på fortegn:
vi kan strekke eller komprimere.
ΔL kan også være negativ.
Bruk intuisjon !

Vi skrive ofte: $F = \pm k\Delta L$

Eksempel:

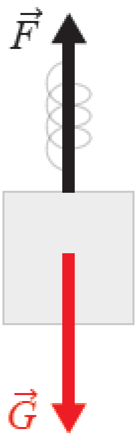
Et lodd av masse m = 10 kg er festet til en fjær med fjærkonstant k = 2000 N/m. Beregn elongasjonen til fjæren hvis klossen er i ro.



Systemet er i likevekt
$\Rightarrow$ vi trenger ikke å bestemme bevegelsen; objektet beveger seg ikke.

Men vi kan bruke oppskriften for å analysere kreftene.

Vi måler posisjonen til loddet oppover.



kontaktkraft F fra fjæren til loddet
gravitasjonskraft G

Kraftmodell:

$$F = -k\Delta L$$

$$\Delta L = L - L_0 < 0$$

$$G = -mg$$

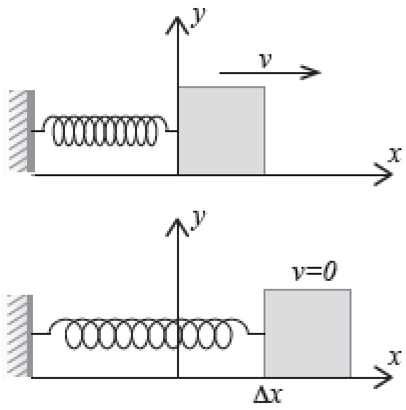
Newtons andre lov:

$$F_{\text{net}} = -k\Delta L - mg = ma = 0$$

$$\Delta L = -\frac{mg}{k} = -\frac{10\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{2000\,\text{N/m}} = -4.9\,\text{cm}$$

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 - 4.9\,\text{cm}$$

Eksempel:



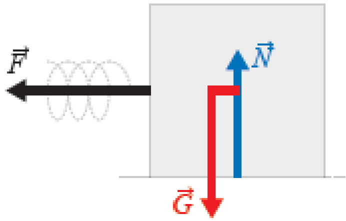
En masse m = 1 kg er festet til en fjær med fjærkonstant k = 100 N/m og kan bevege seg på et bord uten friksjon og luftmotstand. Massen beveger seg med v_0 = 1 m/s ut fra likevektsposisjon.

kontaktkrefter:

- kraft F fra fjær til massen
- normalkraft N fra bordet til massen

langtrekkende kraft:

- gravitasjonskraft G



Normalkraft kompenserer gravitasjon: $\vec{N} = -\vec{G}$
$\Rightarrow$ ingen bevegelse i y retning.

kraft F fra fjær til massen: $F = \pm k\Delta L$

vi definerer x = 0 i likevektsposisjon;
hvis x > 0 trekker kraften i negativ x retning: $F = -kx$

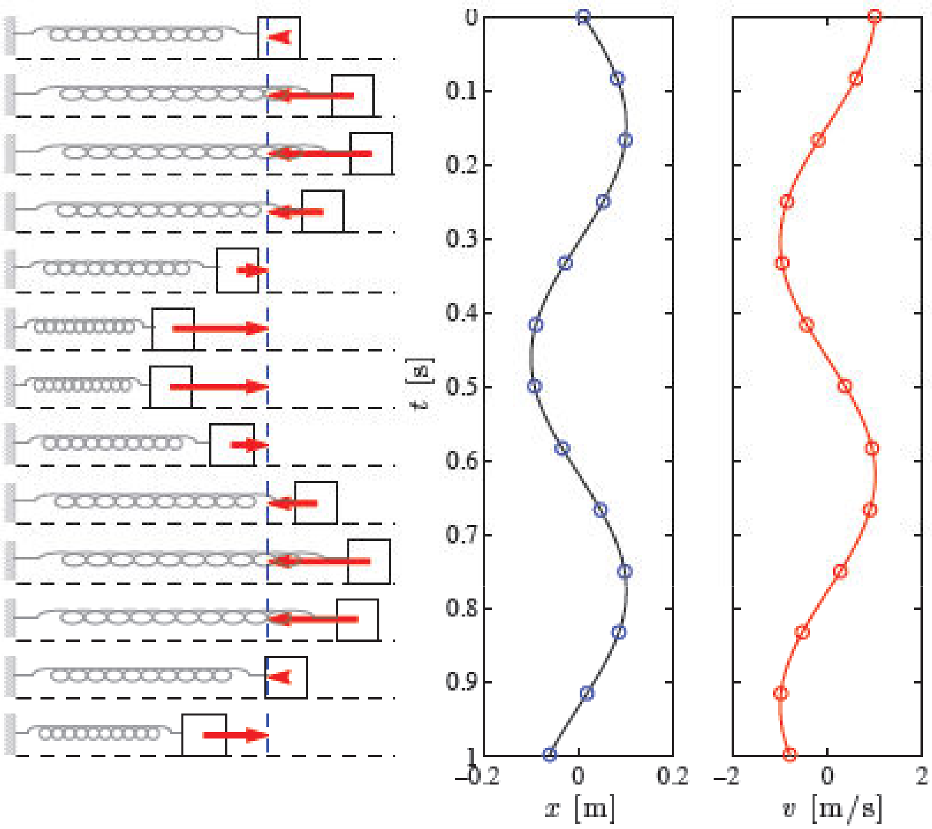
initialbetingelser:

$$x(t_0) = 0\,\mathrm{m}$$
$$v(t_0) = 1\,\mathrm{m/s}$$

N2L: $$\sum F_x = F = -kx = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x$$

Numerisk løsning med Euler-Cromer:

```
% Initialize
m = 1.0;     % kg
k = 100.0; % N/m
v0 = 1.0;    % in m/s
time = 2.0; % s
% Numerical setup
dt = 0.0001; % s
n = ceil(time/dt);
t = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
% Initial values
x(1) = 0.0;
v(1) = v0;
% Simulation loop
for i = 1:n-1
    F = -k*x(i);
    a = F/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
% Plot results
```



massen svinger frem og tilbake

vi leser fra diagrammet:
$x_{max} = \pm 0.1$ m
$v_{max} = 1$ m/s ved $x = 0$ m

Men hva er sammenheng mellom x_{max} m, k, og v_0 ?

Analytisk: $F = -kx$ initialbetingelser: $x(t_0) = 0\,\mathrm{m}$

$v(t_0) = 1\,\mathrm{m/s}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

ansatz: $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}}{1\,\mathrm{kg}}} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$$

frekvens:
stiv fjær eller liten masse
$\Rightarrow$ rask svingning

$$x(0) = B = 0$$

$$v(0) = \omega A = v_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{1\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{s}^{-1}} = 0.1\,\mathrm{m}$$

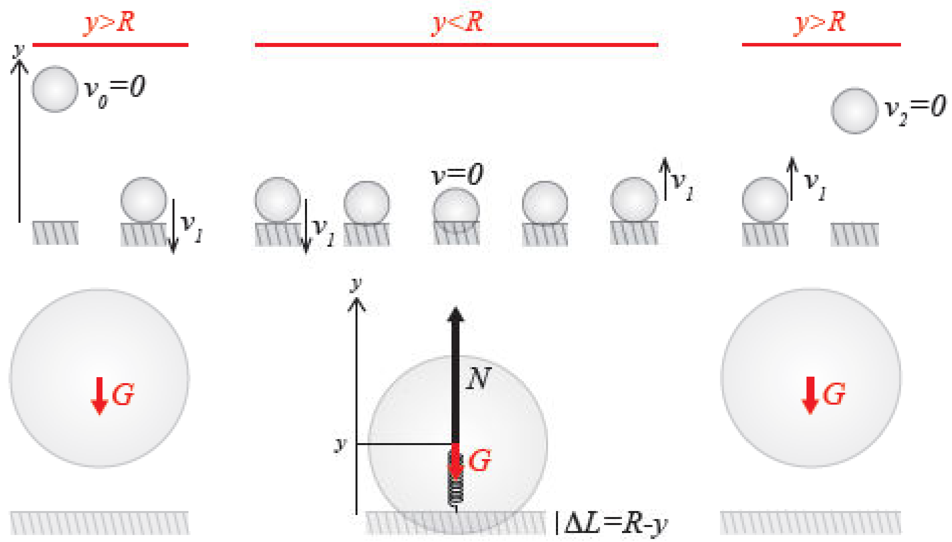
amplitude:
høy initialhastighet
$\Rightarrow$ stor amplitude

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$v(t) = v_0\cos(\omega t)$$

Eksempel:

En ball med radius *R* faller ned og spretter opp igjen fra gulvet.



Vi måler posisjon av ballens senteret fra gulvet med *y*(*t*).

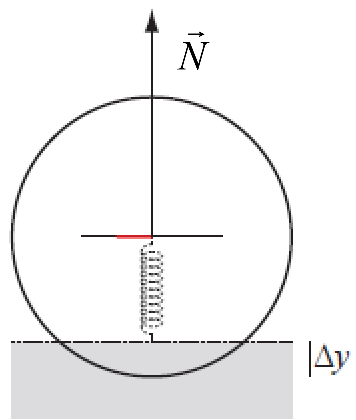
Mens ballen faller: $y(t) > R$

Vi ser bort fra luftmotstand;
eneste kraft er gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

Mens ballen er i kontakt med gulvet: $y(t) < R$

Ballen deformeres
$\Rightarrow$ vi modellerer normalkraften som en fjærkraft: $\vec{N} = \pm k\,\Delta L\,\hat{j}$

$$\Delta L = R - y(t) > 0 \qquad \vec{N} = +k\left(R - y(t)\right)\hat{j}$$



$$\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \le R \\ 0 & y > R \end{cases}$$

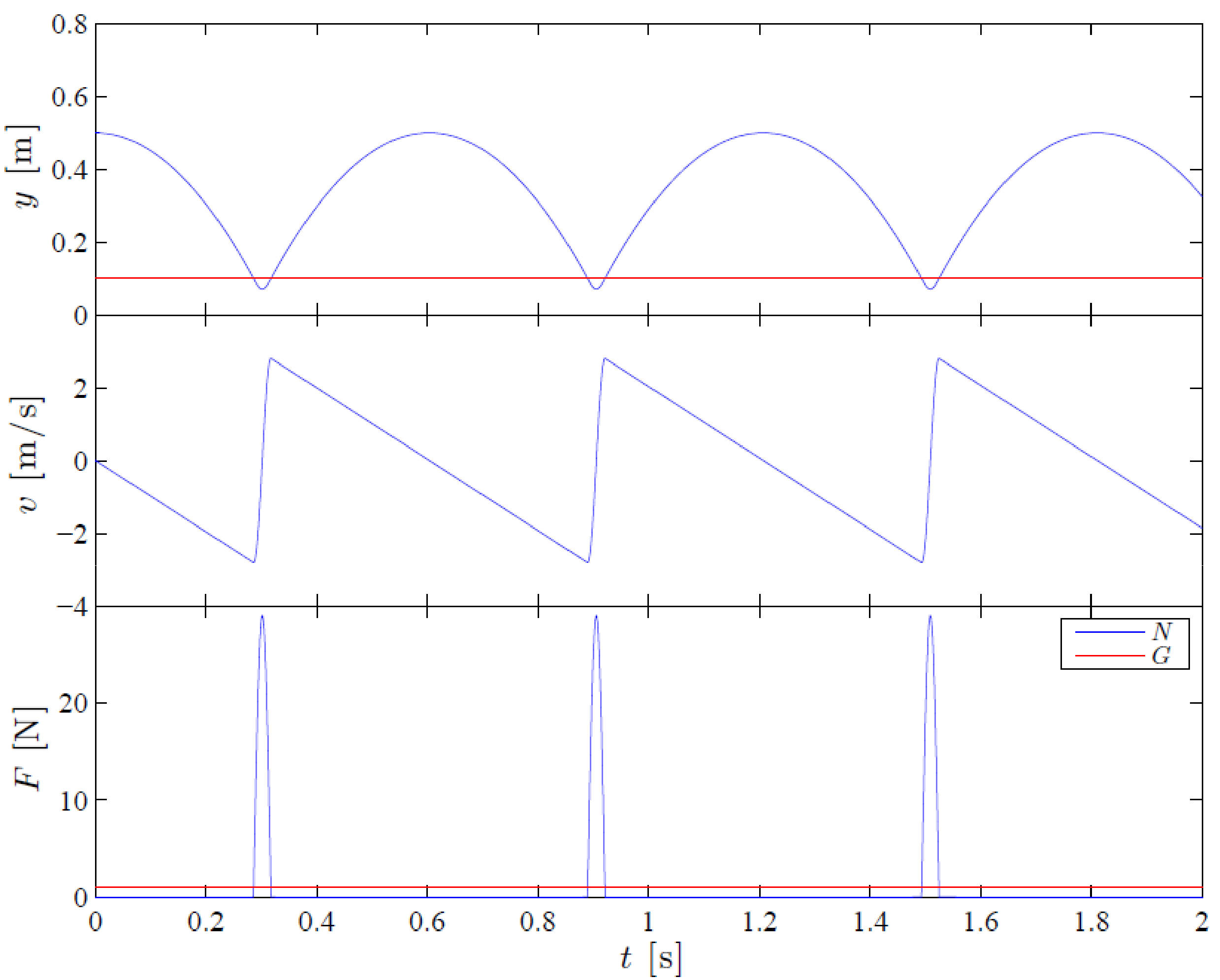
N2L: $\sum F_y = N(y) - mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{N(y)}{m} - g$

Numerisk løsning:

```
% Initialize
m = 0.1;      % kg
k = 1000.0; % N/m
R = 0.1;      % m
v0 = 0.0;    % m/s
y0 = 0.5;    % m
g = 9.8;      % m/s
time = 2.0; % s
% Numerical setup
dt = 0.0001; % s
n = ceil(time/dt);
t = zeros(n,1);
y = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
N = zeros(n,1);
% Initial values
y(1) = y0;
v(1) = v0;
```

```
% Simulation loop
for i = 1:n-1
    if (y(i)>R)
        N(i) = 0.0;
    else
        N(i) = k*(R-y(i));
    end
    Fnet = N(i) - m*g;
    a = Fnet/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    y(i+1) = y(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
% Plot results
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(t,y,'-b',[t(1) t(end-1)],[R R],'-r')
ylabel('y [m]')
subplot(3,1,2)
plot(t,v,'-b')
ylabel('v [m/s]')
subplot(3,1,3)
G = m*g*ones(n,1);
plot(t,N,'-b',t,G,'-r');
xlabel('t [s]')
ylabel('F [N]')
legend('N','G');
```

Results:



vi neglisjerte luftmotstanden
$\Rightarrow$ ingen demping

stiv fjærkonstant k
$\Rightarrow$ lite kompresjon

hastigheten endrer fortegn mens i kontakt med gulvet (rask)

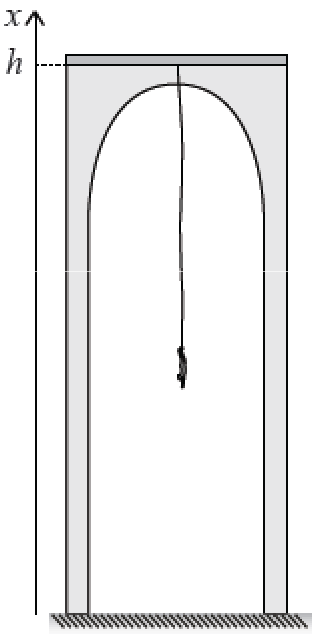
kontakten er kort,
men kraften meget stor

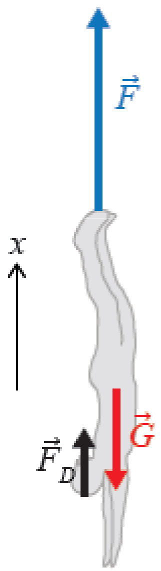
$\Rightarrow$ viktig å velge små Δt

Kan vi forandre frekvensen hvor ofte ballen spretter?

Eksempel: bungee jump

En person av masse m = 70 kg hopper med en strikk av lengde d = 50 m fra en bro av høyde h = 100 m. Vi kan beskrive strikken med en fjærkonstant k = 200 N/m og en viskøs koeffisient k_v = 30 kg/s. For luftmotstanden kan vi bruke D = 0.22 kg/m. Treffer han bakken?





Vi beskriver bevegelsen til hopperen.
Vi måler posisjonen med x(t) oppover fra bakken.
Initialbetingelser:

$$x(t_0) = x_0 = 100\,\mathrm{m}$$

$$v(t_0) = v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$$

$$t_0 = 0\,\mathrm{s}$$

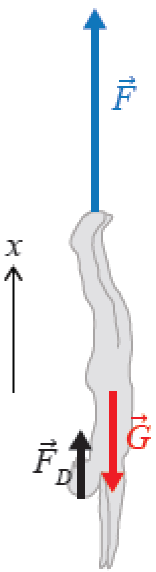
Kontaktkrefter:
- kraft F fra strikken til hopperen
- luftmotstand F_D

langtrekkende krefter:
- gravitasjon G

Kraftmodell:

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{i}$

luftmotstand: $\vec{F}_D = -Dv|v|\,\hat{i}$



Kraften fra strikken virker bare hvis den er strukket.

elongasjon: $\Delta L = (h-d) - x$

fjærkraft: $\vec{F}_S = \begin{cases} +k\Delta L\,\hat{i} & \Delta L > 0 \\ 0 & \Delta L \leq 0 \end{cases}$

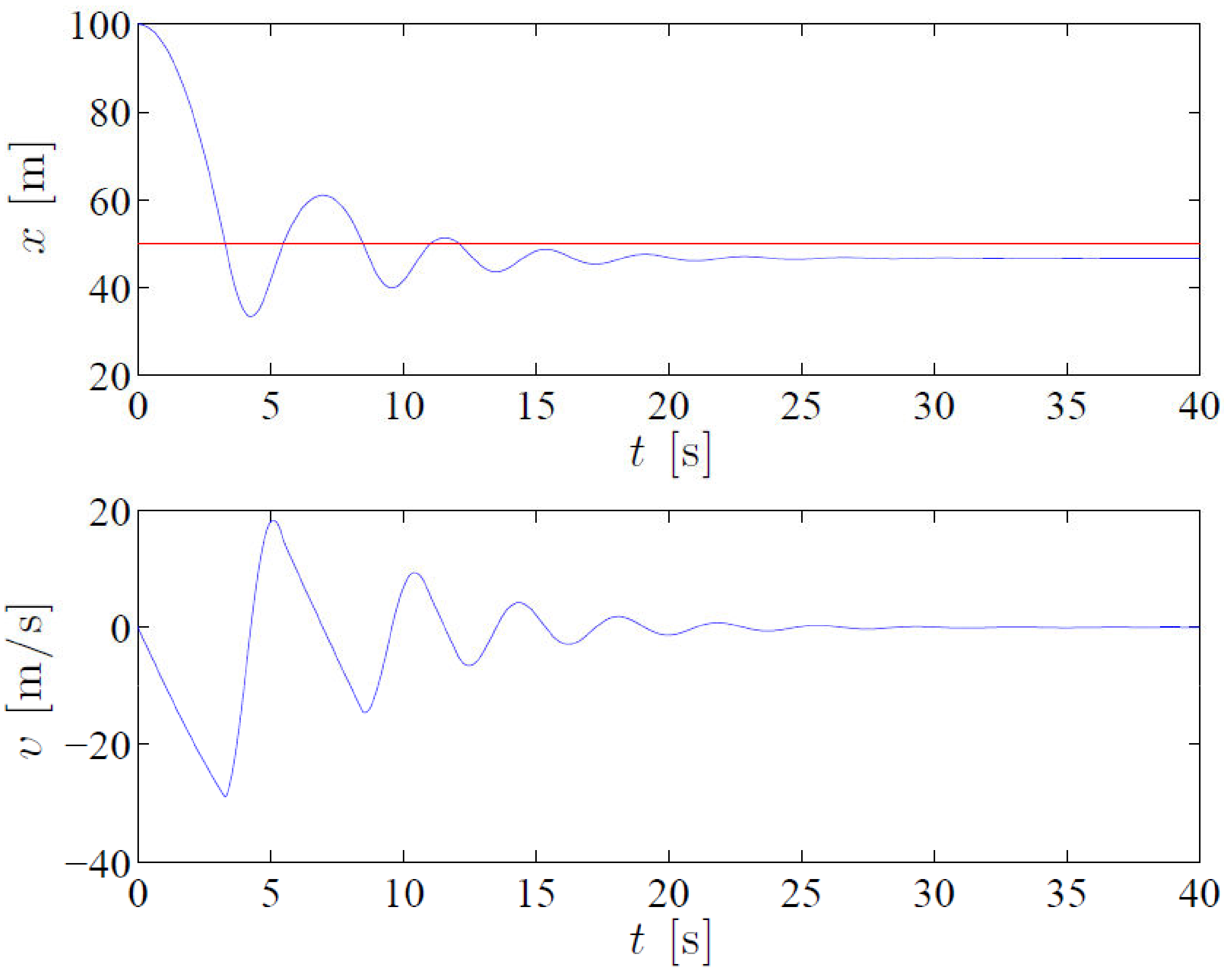
viskøs kraft avhenger av endingsraten for ΔL: $\frac{d}{dt}\Delta L = \frac{d}{dt}(h-d-x) = -\frac{dx}{dt} = -v$

$$\vec{F} = \begin{cases} k(h-d-x)\,\hat{i} - k_v v\,\hat{i} & x < h-d \\ 0 & x > h-d \end{cases}$$

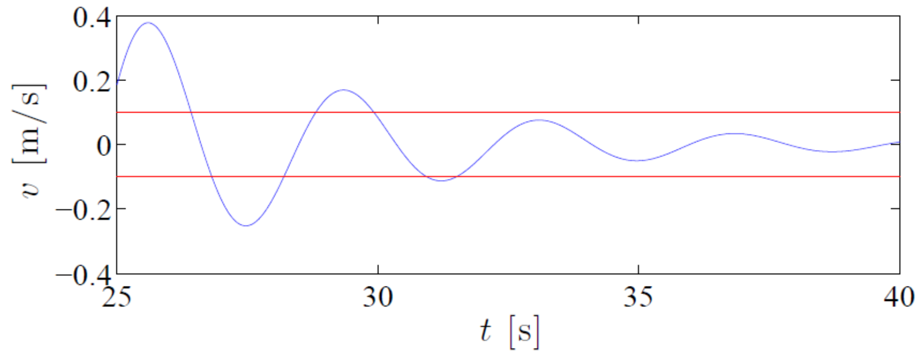
N2L: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_D = F(x,v)\,\hat{i} - mg\,\hat{i} - Dv|v|\,\hat{i} = ma\,\hat{i}$

```matlab
clear all; clf; % Physical constants
g = 9.8;
D = 0.22;
m = 70.0; % Mass of jumper
kv = 30.0;
k = 200.0;
h = 100.0; % Height of bridge
d = 50.0;  % Length of cord
time = 40.0;
dt = 0.001;
% Initial conditions
v0 = 0;
x0 = h;
% Numerical initialization
n = time/dt;
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
a = zeros(n,1);
t = zeros(n,1);
% Set initial values
x(1) = x0;
v(1) = v0;
```

```matlab
% Integration loop
for i = 1:n-1
  if (x(i)<h-d)
      F = k*(h-d-x(i)) - kv*v(i);
  else
      F = 0.0;
  end
  a(i) = F/m -g - (D/m)*v(i)*abs(v(i));
  v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
  x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
  t(i+1) = t(i) + dt;
end
% Plot results
```



Når slutter bevegelsen ?



Newtons første lov:

Alle legemer bevarer sin tilstand av ro eller jevn bevegelse i en rett linje, dersom det ikke blitt tvunget til å endre denne tilstand av krefter som blir påført.

spesiell tilfelle som følger fra Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = \text{konst.}$$

husk: det gjelder bare for inertialsystemer.

Newtons tredje lov:

Enhver virkning har alltid og tilsvarende en motvirkning, eller den gjensidige påvirkning av to legemer på hverandre er alltid lik, og motsatt rettet.

$$\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$$

Newtons tredje lov forbinder krefter mellom legemer:

Hvis jeg dytter på veggen, dytter veggen tilbake på meg med like stor kraft.

- essensiell for å beskrive systemer som består av flere legemer
- krefter kommer i par: kraft og motkraft
- kreftene i paret virker på forskjellige legemer