Newtons tredje lov

Kinematikk i to og tre dimensjoner

31.01.2013

husk: innlevering oblig #1 Mandag, 4.Feb. kl.10

Newtons tredje lov:

Enhver virkning har alltid og tilsvarende en motvirkning, eller den gjensidige påvirkning av to legemer på hverandre er alltid lik, og motsatt rettet.

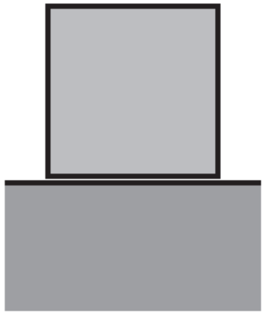
$$\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$$

Newtons tredje lov forbinder krefter mellom legemer:

Hvis jeg dytter på veggen, dytter veggen tilbake på meg med like stor kraft.

- essensiell for å beskrive systemer som består av flere legemer
- krefter kommer i par: kraft og motkraft
- kreftene i paret virker på forskjellige legemer

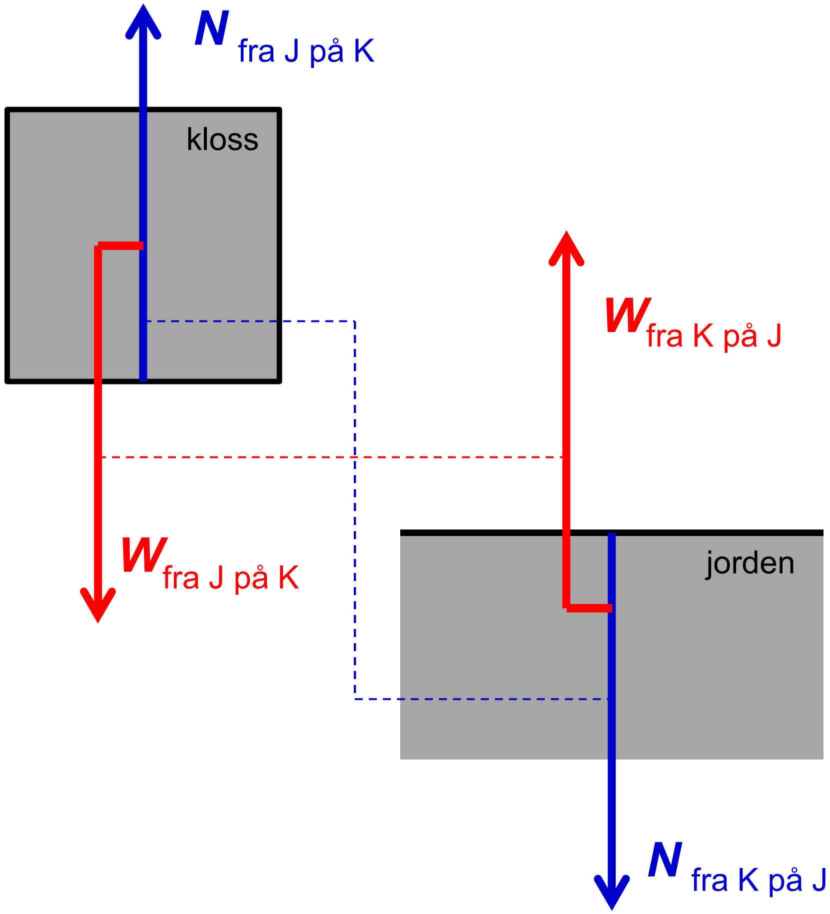
Eksempel:



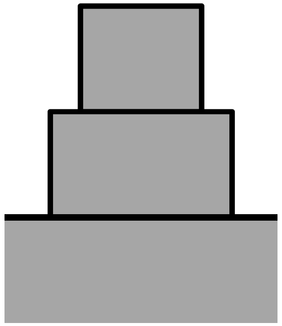
En kloss ligger i ro på bakken.

Oppskrift:

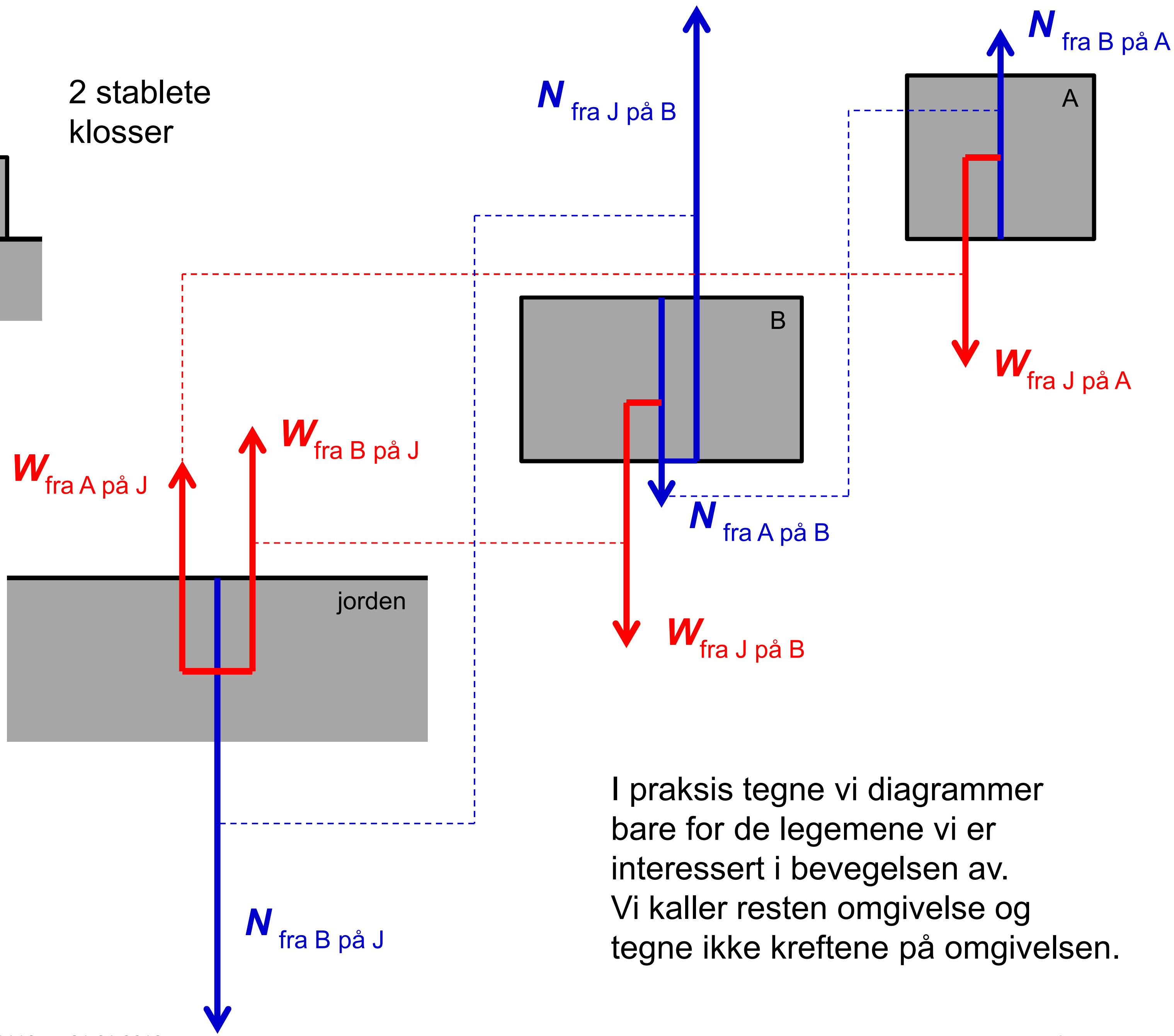
- tegn alle legemer som separate systemer
- finn alle krefter på alle objekter
- uttrykk kreftene som $F_{\text{A på B}}$
- finn kraft – motkraft par
- sjekk: hver kraft har en unik motkraft



Eksempel

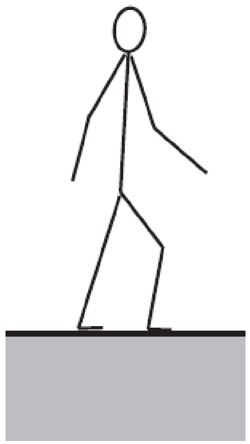


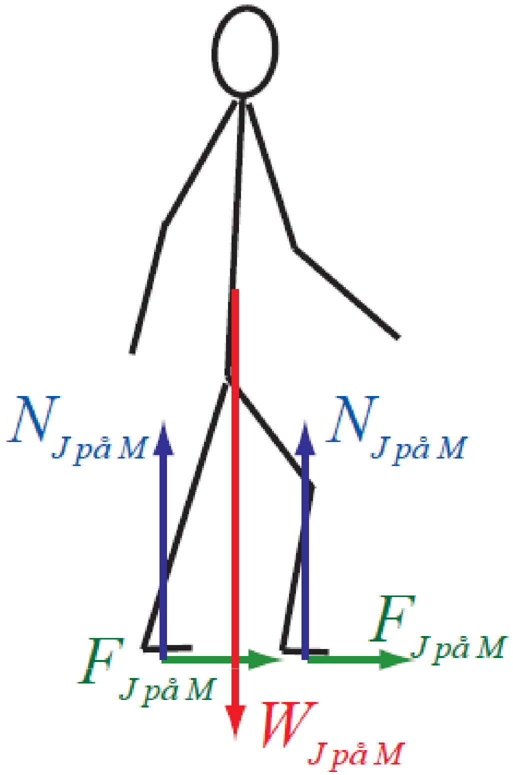
2 stablete klosser

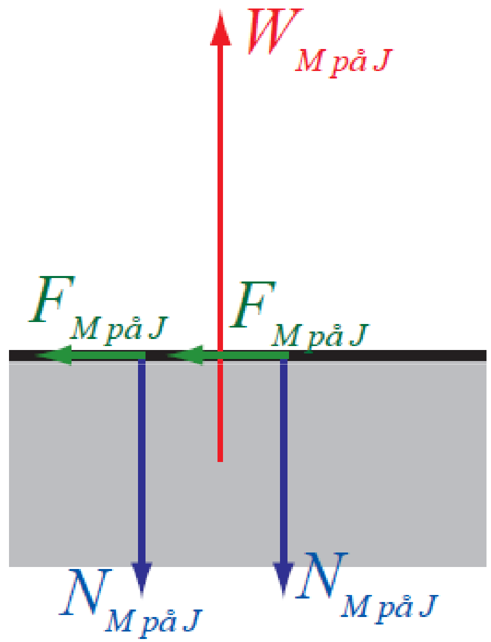


I praksis tegne vi diagrammer bare for de legemene vi er interessert i bevegelsen av.
Vi kaller resten omgivelse og tegne ikke kreftene på omgivelsen.

Eksempel: Mann som går



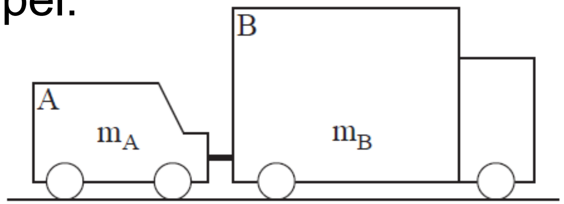




bevegelse fremover på grunn av friksjonskraft:

- ➢ mannen dytter jorden bakover
- ➢ jorden dytter mannen fremover

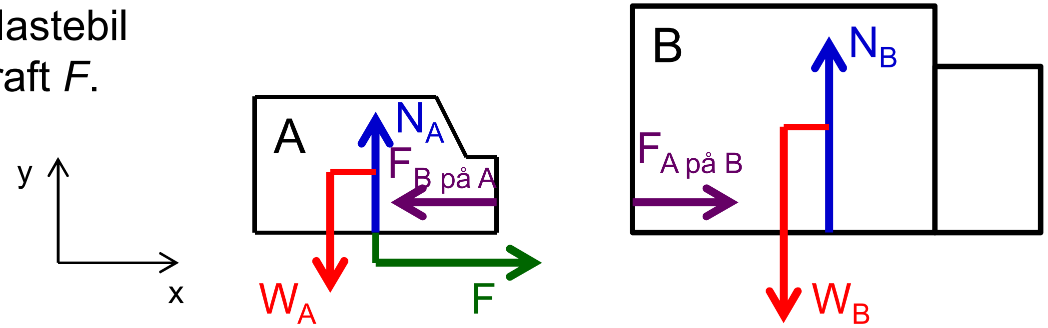
Eksempel:



kinematisk betingelse:
biler er i kontakt

$$x_B = x_A + L$$
$$v_B = v_A = v$$
$$a_B = a_A = a$$

En bil dytter en lastebil
med konstant kraft *F*.



N2L for A:

$$\sum F_y = m_A a_y = 0 = N_A - m_A g$$
$$\sum F_x = m_A a_x = F - F_{\text{B på A}}$$

N2L for B:

$$\sum F_y = m_B a_y = 0 = N_B - m_B g$$
$$\sum F_x = m_B a_x = F_{\text{A på B}}$$

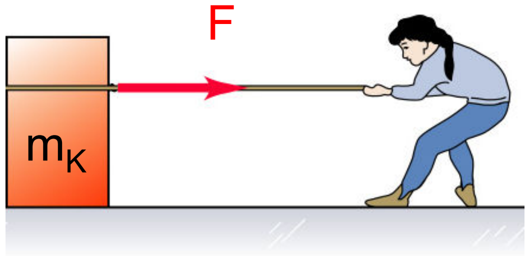
N3L: $\vec{F}_{\text{B på A}} = -\vec{F}_{\text{A på B}}$

$$F_{\text{B på A}} = F_{\text{A på B}}$$

$$(m_A + m_B) a_x = F - F_{\text{B på A}} + F_{\text{A på B}} = F$$

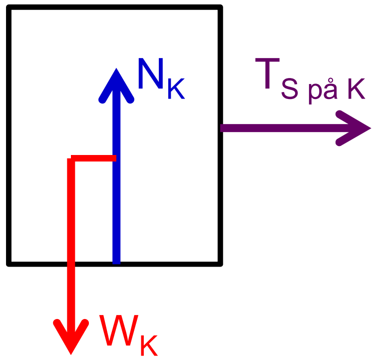
System oppfører seg som ett legeme med masse m_A+m_B
Vi trenger ikke se på indre krefter,
bare på krefter mellom systemet og omgivelsen.

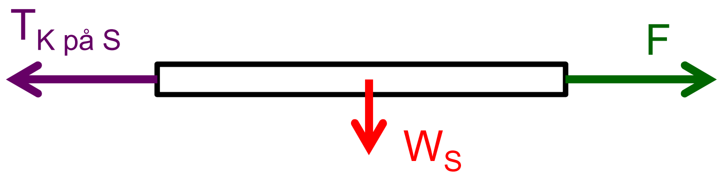
Eksempel



En kvinne trekke på en kiste med en snor.

Vi deler system i to legemer: kiste og snor





Vi ser kun på bevegelse i x – retning.

Kinematisk betingelse: snoren er stram: $a_K = a_S = a$

N2L kiste: $\sum F_x = m_K a = T_{\text{S på K}}$

N2L snor: $\sum F_x = m_S a = F - T_{\text{K på S}}$

N3L: $\vec{T}_{\text{S på K}} = -\vec{T}_{\text{K på S}}$

$$T_{\text{S på K}} = T_{\text{K på S}} = T$$

$$a = \frac{T}{m_K}$$

$$F = \frac{m_S}{m_K} T + T$$

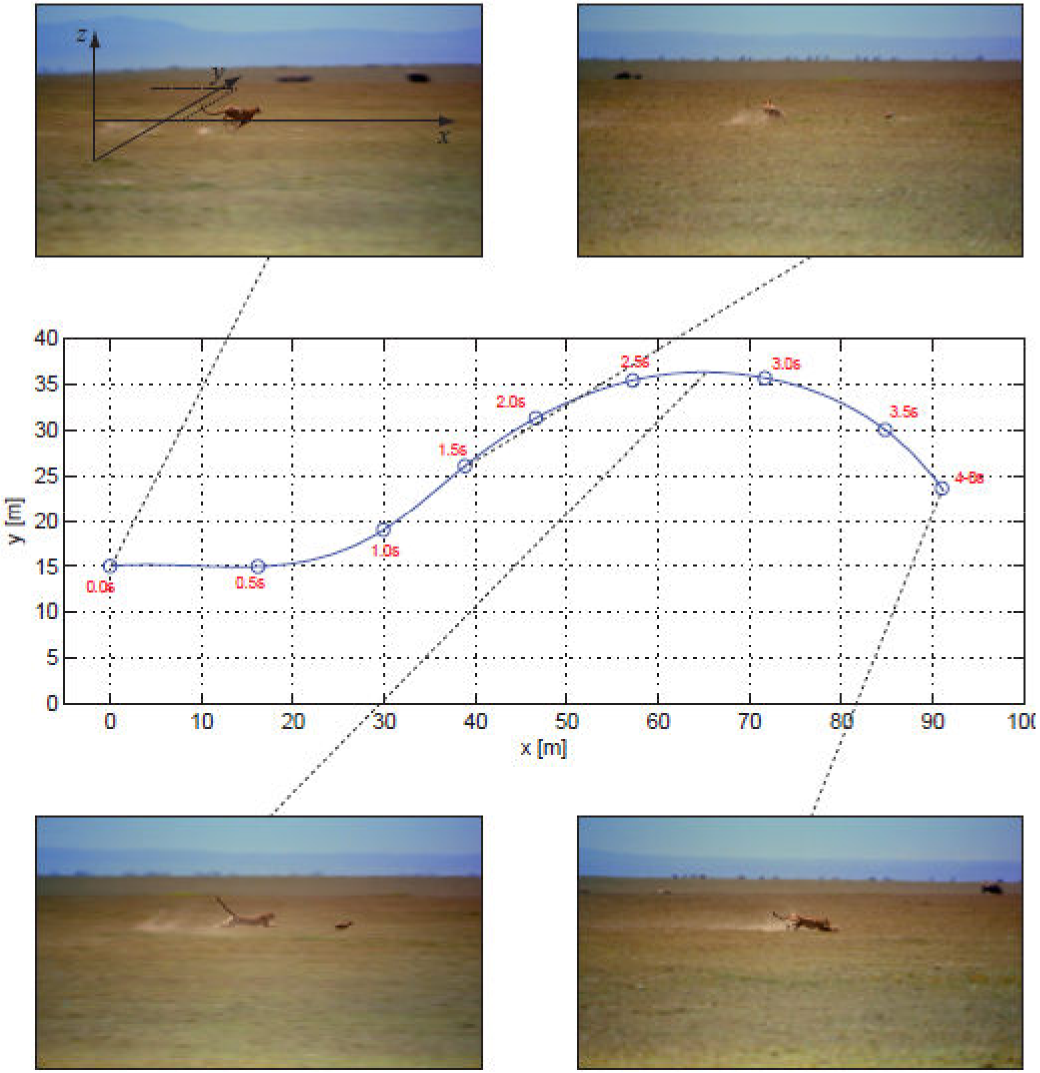
$$m_S << m_K$$

$$F = T$$

masseløs snor

Bevegelse i to og tre dimensjoner

Bevegelsesdiagram i to dimensjoner



her er bevegelsen todimensjonal
vi kan beskrive posisjon med

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

med enhetsvektorer $\hat{i}, \hat{j}$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

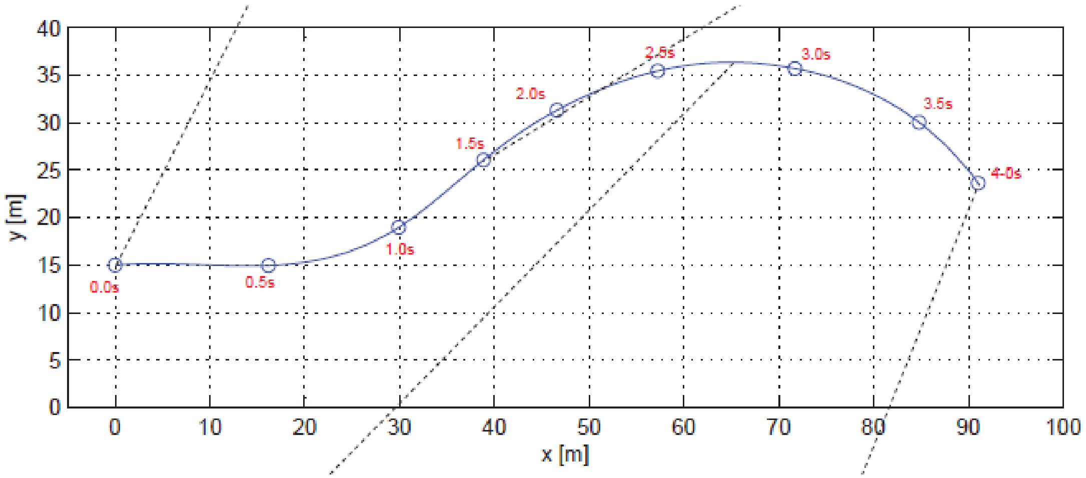
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

for eksempel

$$\vec{r}(1.0\,\mathrm{s}) = 29.8\,\mathrm{m}\,\hat{i} + 18.9\,\mathrm{m}\,\hat{j}$$

posisjonsvektor i tre dimensjoner:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



todimensjonal bevegelsesdiagram:

vi analysere bevegelsen videre:

- hastighet?
- akselerasjon?

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

vi kan se på *x*(*t*) og *y*(*t*) hver for seg

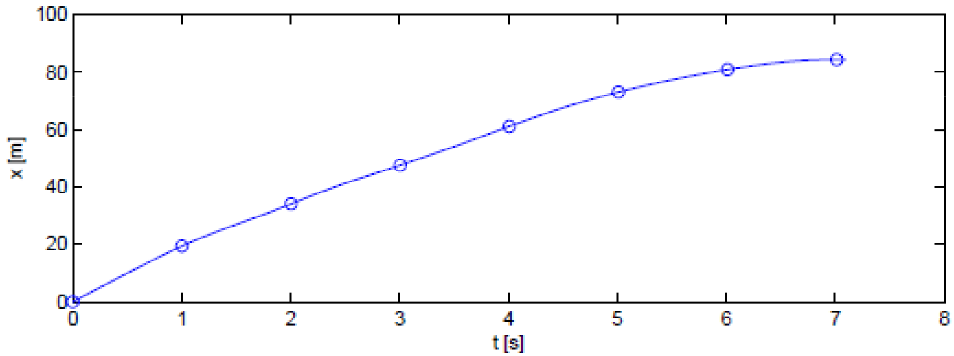
hastighet og akselerasjon i x og y retning:

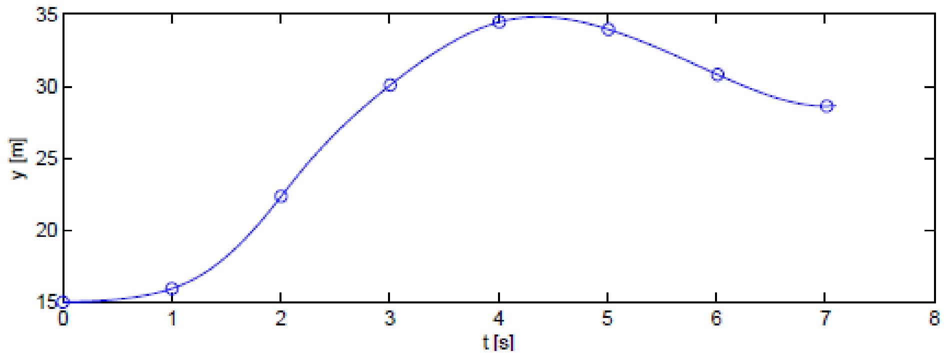
$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t)\,, \quad v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t)\,, \quad a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$$





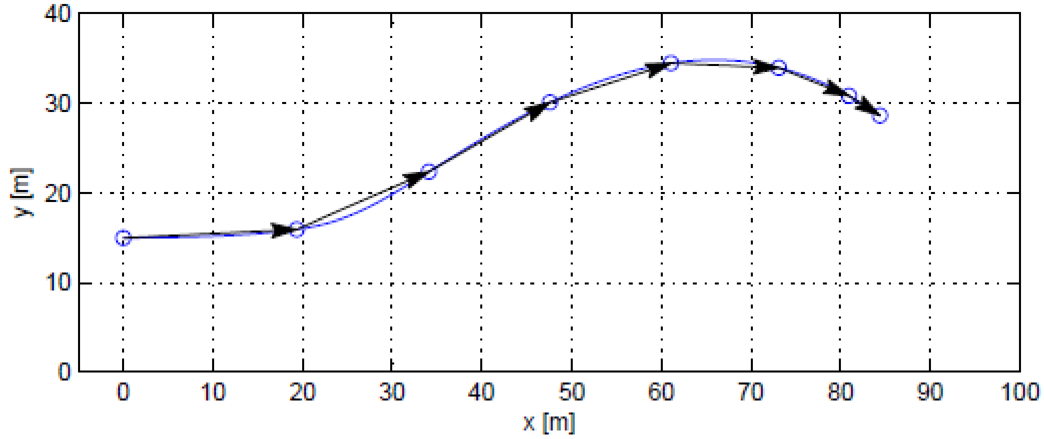
gjennomsnittshastighet:

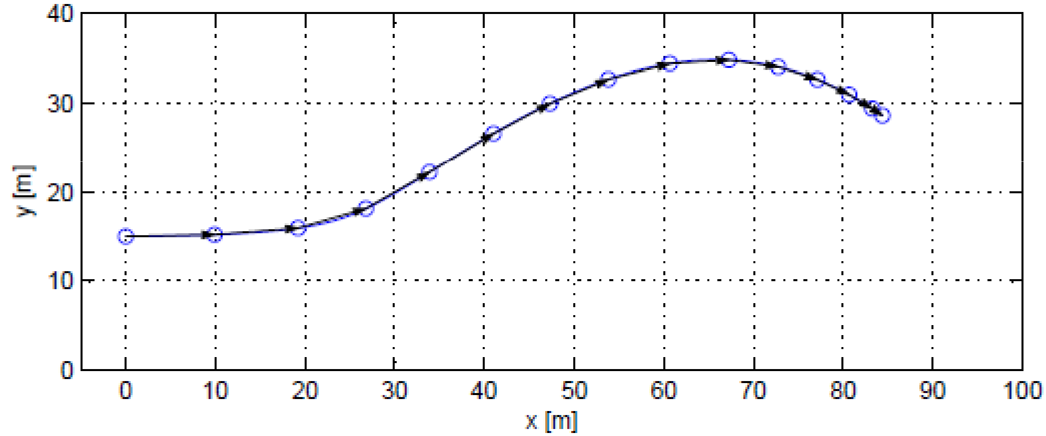
$$\overline{\vec{v}}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

avhenger av Δt.

momentanhastighet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$





hastighetsvektor: $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$= v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

hastighet: $\vec{v}(t)$

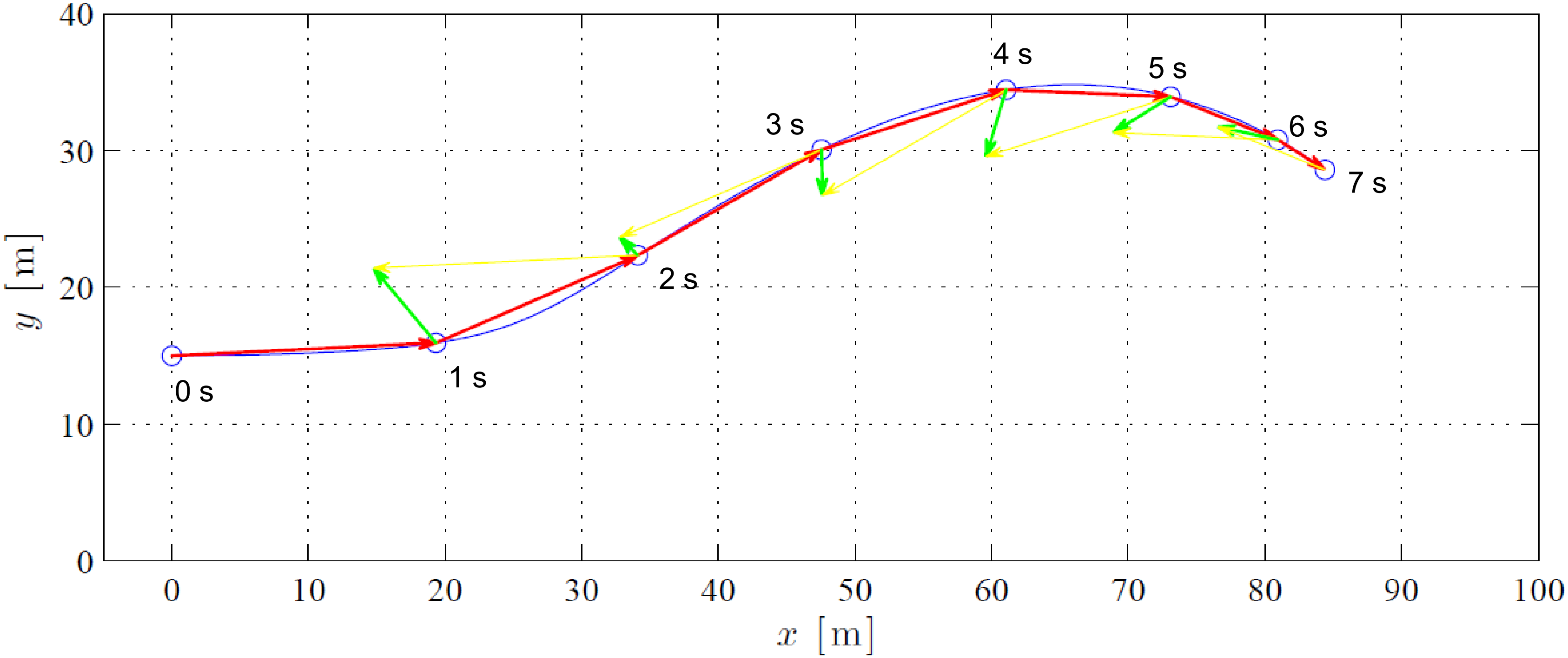
fart: $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$

akselerasjonsvektor: $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$= a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$



$$\vec{r}(0\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{m} \\ 15\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(1\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 19.3\,\mathrm{m} \\ 15.9\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(2\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 34.1\,\mathrm{m} \\ 22.3\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\vec{v}}(0.5\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 19.3\,\mathrm{m/s} \\ 0.9\,\mathrm{m/s} \end{pmatrix} \qquad \overline{\vec{v}}(0.5\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 14.8\,\mathrm{m/s} \\ 6.4\,\mathrm{m/s} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\vec{a}}(1\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} -4.5\,\mathrm{m/s^2} \\ 5.5\,\mathrm{m/s^2} \end{pmatrix}$$

Bevegningsligninger i tre dimensjoner

La oss anta at vi har gitt $\vec{a}(t)$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt \right) dt$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt \right) dt$$

akkurat de samme som i én dimensjon
bare at vi må bruke vektorer
og det er gyldig for hver komponent

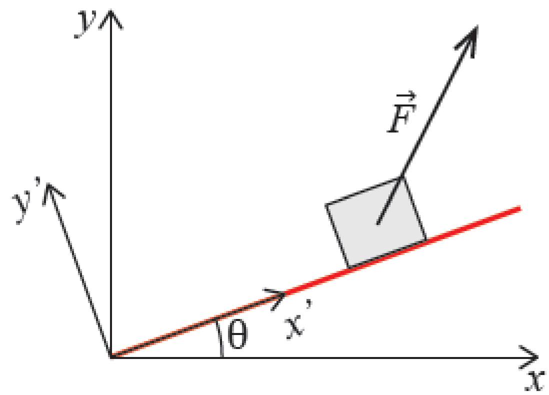
$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t) dt$$

$$v_y(t) = v_{y,0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t) dt$$

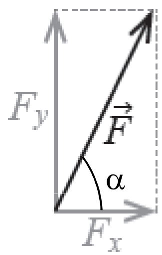
$$v_z(t) = v_{z,0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t) dt$$

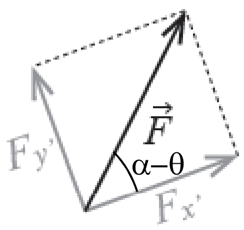
Eksempel:

En kraft $\vec{F} = 1\,\mathrm{N}\,\hat{i} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{j}$ virker på en kiste som står på en skråplan med hellingsvinkel θ=20°. Hvilke kraft virke langs planen?



Vi bruker elementær geometri:





$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

$$F_{x'} = \left|\vec{F}\right|\cos(\alpha-\theta)$$

$$F_{y'} = \left|\vec{F}\right|\sin(\alpha-\theta)$$

```
F = [1 2];
theta = 20.0*pi/180.0;
alpha = atan(F(2)/F(1));
Fxm = norm(F)*cos(alpha-theta);
Fym = norm(F)*sin(alpha-theta);
```

alternativ:
Vi finner først enhetsvektorer i koordinatsystem S'

$$\hat{i}' = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{j}' = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$F_{x'} = \vec{F}\cdot\hat{i}'$$

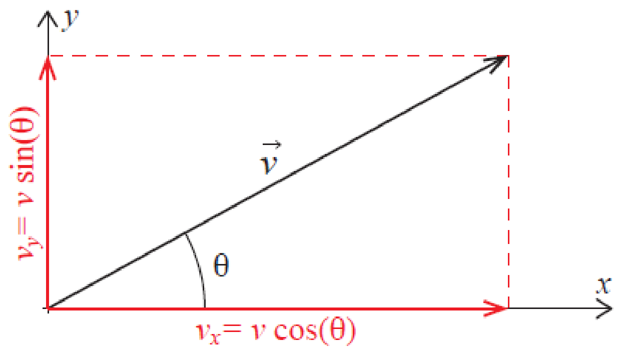
$$F_{y'} = \vec{F}\cdot\hat{j}'$$

```
F = [1 2];
theta = 20.0*pi/180.0;
ux = [cos(theta) sin(theta)];
uy = [-sin(theta) cos(theta)];
Fx = dot(F,ux);
Fy = dot(F,uy);
```

$$F_{x'} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = 1.624\,\mathrm{N}$$

Eksempel: Et fly beveger seg med konstant fart på *v*=500 km/h og en vinkel på 30° mot horisonten. Hva er posisjonen etter 20 s?

Vi beskrive posisjonen til flyet med en vektor $\vec{r}(t)$ hvor x aksen ligger i horisontal og y aksen i vertikal retning.



Ved $t_0 = 0\,\text{s}$ er posisjonen $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$.

sammenheng mellom fart og hastighet: $v = |\vec{v}|$

vi finner hastighetsvektoren geometrisk:

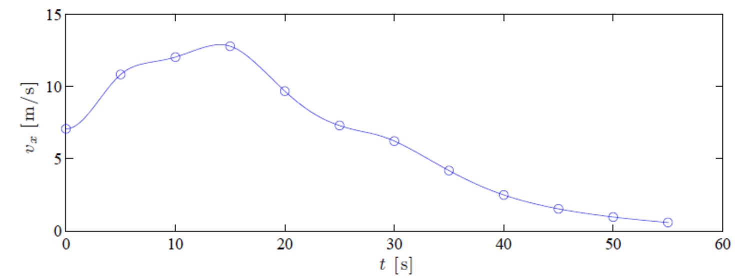
$$v_x = v\cos\theta = 500\,\text{km/h}\cos(30°) = 250\,\text{km/h}$$
$$v_y = v\sin\theta = 500\,\text{km/h}\sin(30°) = 433\,\text{km/h}$$

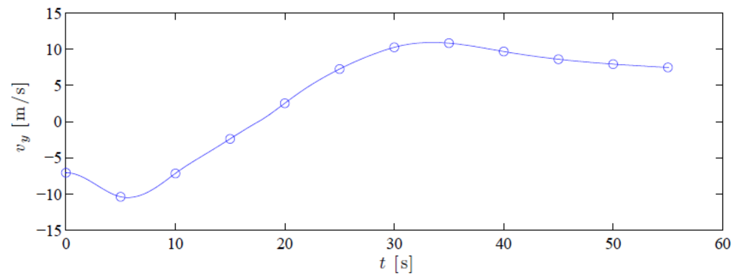
vi løser bevegelsesligning:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_0^t \vec{v}(t)dt = \vec{v}_0\, t$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t = \vec{0} + \left(250\,\text{km/h}\,\hat{i} + 433\,\text{km/h}\,\hat{j}\right)20\,\text{s} = 1390\,\text{m}\,\hat{i} + 2406\,\text{m}\,\hat{j}$$

Vektorer i programmer - eksempel

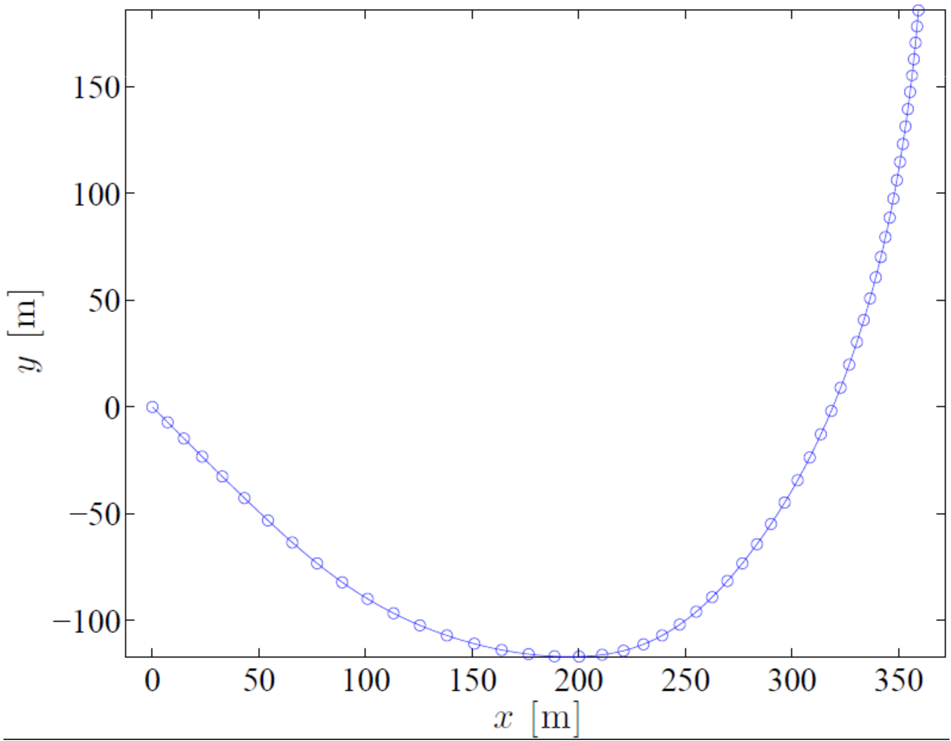
Du har målt hastigheten i x og y retning som funksjon av tiden og skrevet resultatene i en tabell. Finn posisjonen.





t_1	$v_{x,1}$	v_{y1}
t_2	v_{x2}	v_{y2}
...		
t_n	v_{xn}	v_{yn}

```
load -ascii boatvelocity.d
t = boatvelocity(:,1);
n = length(t);
dt = t(2)-t(1);
v = zeros(n,2);
v(:,1) = boatvelocity(:,2);
v(:,2) = boatvelocity(:,3);
r = zeros(n,2);
r(1,:) = [0.0 0.0];
for i = 1:n-1
  r(i+1,:) = r(i,:) + v(i,:)*dt;
end
figure(1);
plot(r(:,1),r(:,2));
axis equal
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```

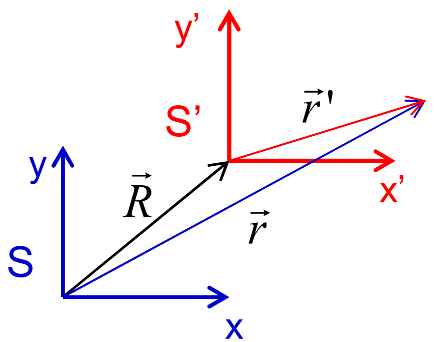


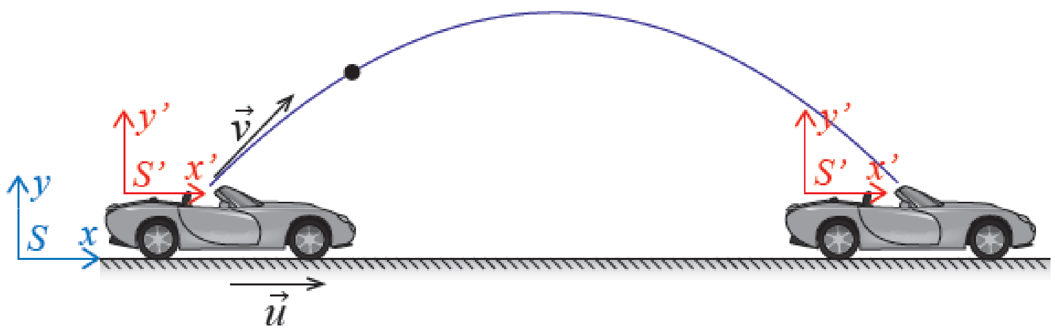
Relativbevegelse og referansesystemer

En person sitter i en åpen bil og kaster en ball rett opp.
Hvordan vil en annen person som står på gaten beskrive bevegelsen? (Vi ser bort fra luftmotstand.)

Sett fra bilen (system *S'*): ballen beveger seg rett opp og faller rett ned igjen.

Sett fra gaten (system *S*): bevegelsen beskrives som en skrått kast



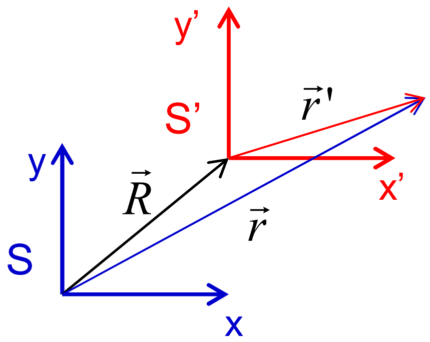


posisjon i gate-system S: $\vec{r}(t)$

posisjon i bil-system S': $\vec{r}\,'(t)$

posisjon av bilen i gate-system: $\vec{R}(t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$



$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)\right) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{u} + \vec{v}\,'(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{u} + \vec{v}\,'(t)\right) = \vec{0} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,'(t)$$

Bilen beveger seg med konstant hastighet $\vec{u}$
akselerasjonene er de samme i begge systemer.

Systemer som beveger seg med konstant hastighet er inertialsystemer.
Newtons lover er gyldig – fysikken er de samme i begge systemer.

Hvordan beskrive vi bevegelsen av ballen?

fra bilen (system S'):
eneste kraft er gravitasjon
initialbetingelse:

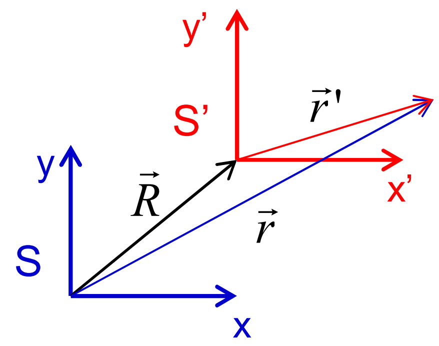
$$\vec{v}\,'(t_0) = \vec{v}\,'_0 = v_0\,\hat{j}$$

fra gaten (system S):
eneste kraft er gravitasjon
initialbetingelse:

$$\vec{v}(t_0) = \vec{u} + \vec{v}\,'(t_0) = u\,\hat{i} + v_0\,\hat{j}$$

Eksempel:

Du sitter i et tog som kjører 360 km/h og du ser på et helikopter. For deg ser det ut som helikopteret beveger seg rett opp med konstant hastighet fra bakken til en bro som er 100 m høy. Det tar 2 s. Hva er hastigheten til helikopteret sett fra bakken?



koordinatsystem festet til toget er S'
koordinatsystem festet på bakken er S

hastighet av toget i system S: $\vec{u} = \frac{d\vec{R}}{dt} = 360\,\text{km/h}\,\hat{i} = 100\,\text{m/s}\,\hat{i}$

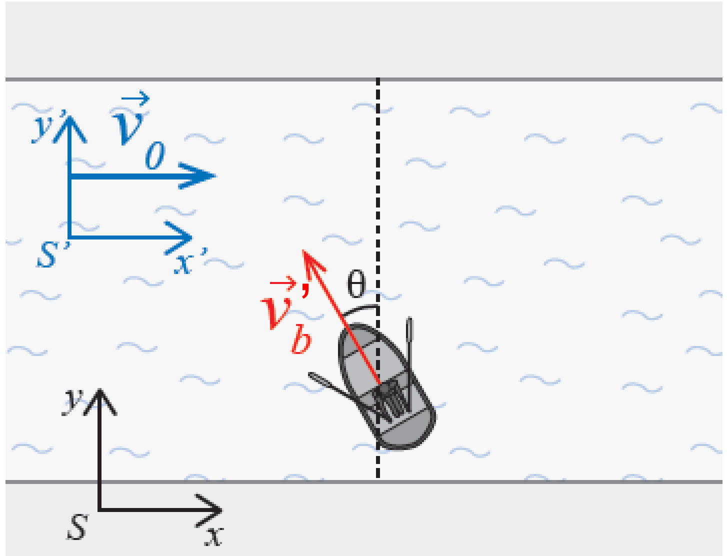
hastighet av helikopteret i system S': $\vec{v}\,' = \frac{100\,\text{m}}{2\,\text{s}}\,\hat{j} = 50\,\text{m/s}\,\hat{j}$

hastighet av helikopteret i system S: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,' = 100\,\text{m/s}\,\hat{i} + 50\,\text{m/s}\,\hat{j}$

$$v = |\vec{v}| = \left|100\,\text{m/s}\,\hat{i} + 50\,\text{m/s}\,\hat{j}\right| = 111.8\,\text{m/s}$$

Eksempel:

Du ror en båt over en elv. Elven strømmer med hastighet v_0. Hvilken vinkel bør du holde for å komme rett over elven?



System festet på elvebredden: S

System festet til vannet: S'

hastighet av vannet i system S: $\vec{u} = v_0\,\hat{i}$

hastighet av båten i system S': $\vec{v}'_b = -v'_b \sin(\theta)\,\hat{i} + v'_b \cos(\theta)\,\hat{j}$

hastighet av båten i system S: $\vec{v}_b = \vec{u} + \vec{v}'_b = v_0\,\hat{i} - v'_b \sin(\theta)\,\hat{i} + v'_b \cos(\theta)\,\hat{j}$

Hvis du skal kommer rett over elven, så må du ikke ha hastighet i x retning i system S

$$v_0 - v'_b \sin(\theta) = 0$$

$$\sin(\theta) = \frac{v_0}{v'_b}$$

$$\sin(\theta) \le 1 \quad \Rightarrow \quad v'_b \ge v_0$$

Du kan bare klare det hvis du ror raskere enn elven strømmer.