Newtons lover i to og tre dimensjoner

05.02.2013

obliger innleveres mandag kl.10

betal for læreboken

Bevegelse i tre dimensjoner

Bevegelsen er karakterisert ved posisjon, hastighet og akselerasjon.

Vi må bruker vektorer:

posisjon: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$

hastighet: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$

akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$

hastighet: $\vec{v}(t)$

fart: $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$

Skalarer og vektorer

notasjon:

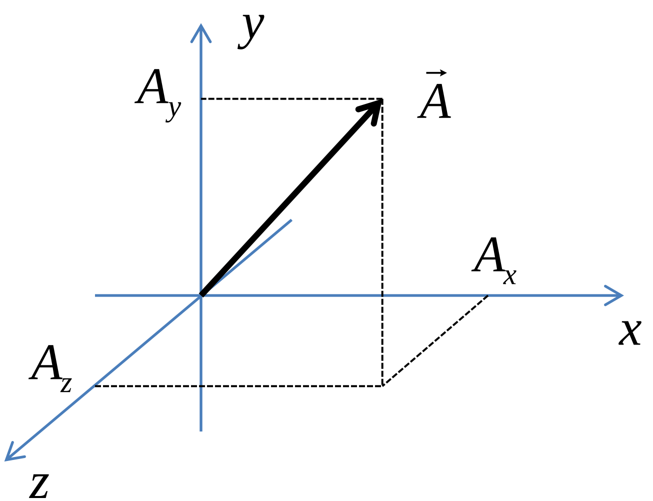
skalar: størrelse, men ingen retning
eksempel: masse, temperatur, lengde, fart, ...

$$m, T, l, v$$

vektor: størrelse og retning
eksempel: posisjon, hastighet, akselerasjon, kraft, ...

$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$$

vektorkomponenter:



i kartesisk koordinatsystem:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

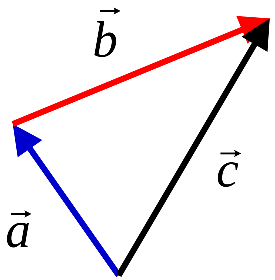
$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kommer å bruke også sfæriske og sylindriske koordinatsystemer senere.

Regne med vektorer:

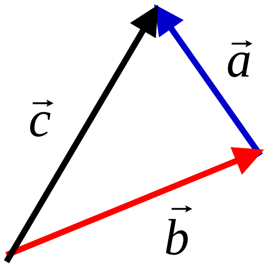
addisjon:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$



kommutativ:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

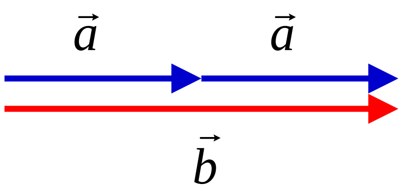


assosiativ:

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

multiplikasjon med en skalar:

$$\vec{b}=2\vec{a}$$

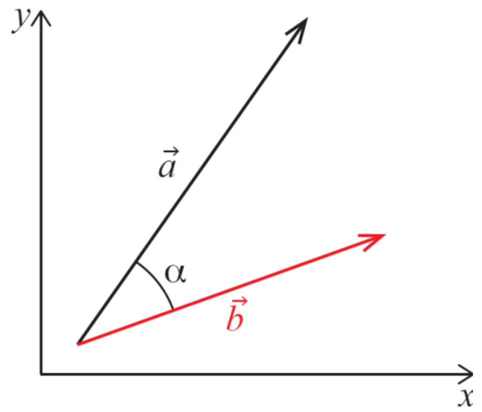


i Matlab:

```
a = [3 2 -1];
b = [-2 0 3];
c = a+b;
d = 0.75;
e = d*a;
```

Skalarprodukt (=indreprodukt)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$



lineær: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

i komponenter:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = (\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j}) + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

i Matlab:

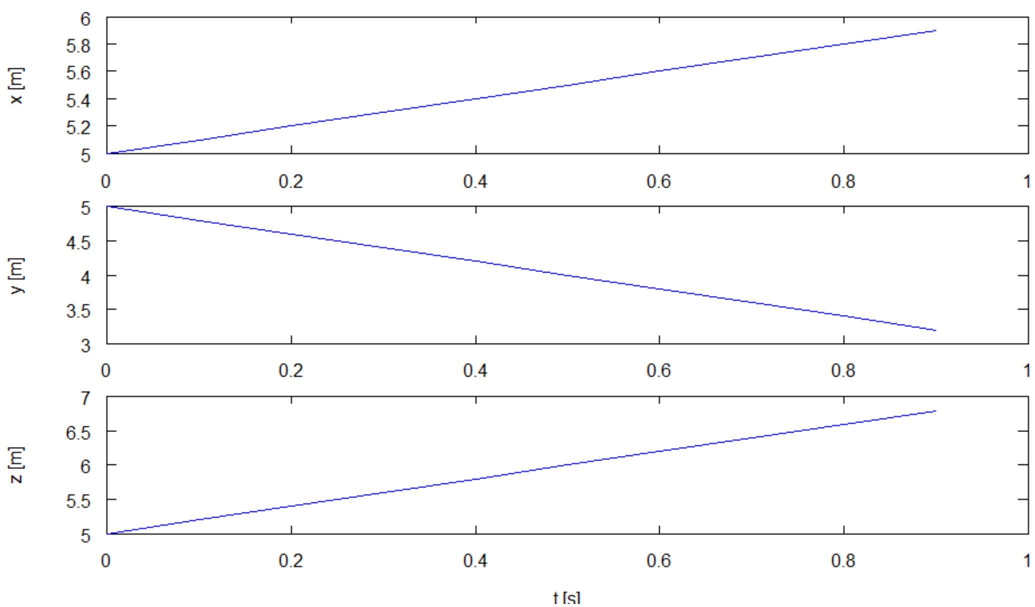
```
a = [3 2 -1];
b = [-2 0 3];
c = dot(a,b);
ux = [1 0 0];
ax = dot(a,ux);
an = sqrt(dot(a,a));
```

tidssekvenser av vektorer ⇒ matriser

```
v = [1.0 -2.0 2.0];
n = 10;
r = zeros(n,3);
t = zeros(n,1);
r(1,:) = [5.0 5.0 5.0];
dt = 0.1;
for i=1:n-1
    r(i+1,:) = r(i,:) + v*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

v: 3d-vektor konstant over tiden ⇒ (1x3) matrise
n: antall tidsskritter ⇒ skalar
r: 3d-vektor evaluert ved n tider ⇒ (nx3) matrise
t: skalar evaluert ved n tider ⇒ (nx1) matrise
r(1,:) første tid (linje) i (nx3) matrise = 3d-vektor
dt: tidsskritt ⇒ skalar

linje i (nx3) matrise = vektor = vektor + vektor * skalar
linje i (nx1) matrise = skalar = skalar + skalar



Generell løsningsmetode

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi?
Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Analyser:

Er resultatene for $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ fornuftig?

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

Vi bruker den samme løsningsmetoden også i tre dimensjoner:

- kreftene er vektorer og vi må passe på retning
- viktig å definere koordinatsystem og være konsistent
- bevegelsesligning er en vektorligning
- spesiell i numeriske utregninger: vær klar over hva er vektor, skalar, matrise

Oppskrift for fri-legeme diagrammer:

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.

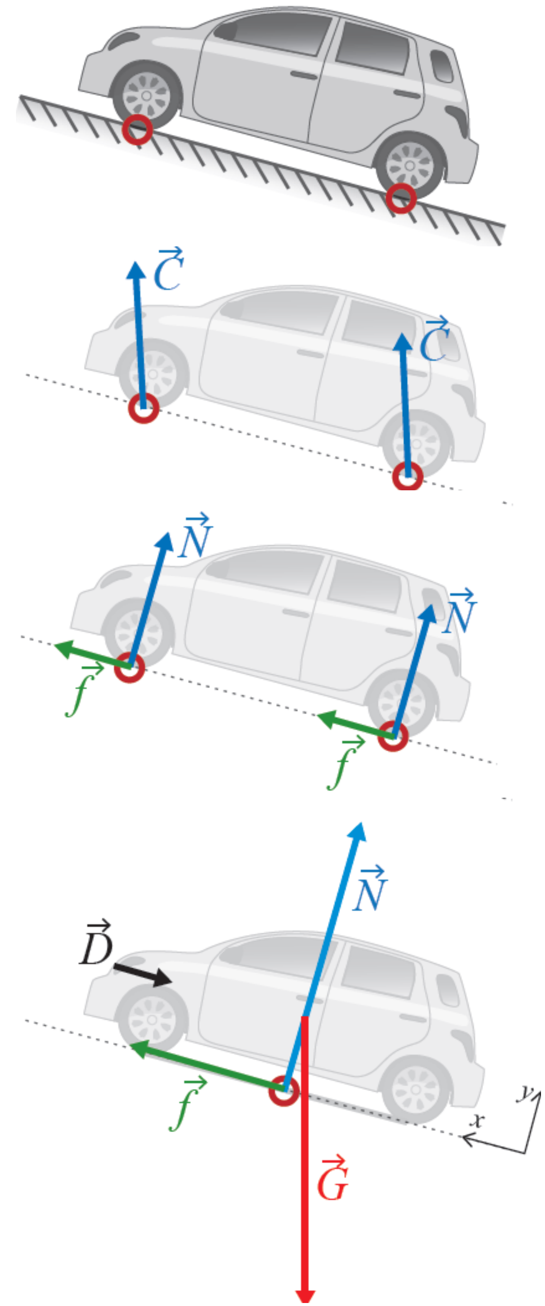
   forenklinger: flate $\rightarrow$ punkt; flere / ett punkt
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.

   Vi trenger forståelse og kraftmodeller.

   Her: normalkraft og friksjonskraft i samme punkt
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
7. Tegn objektet med skalerte krefter.

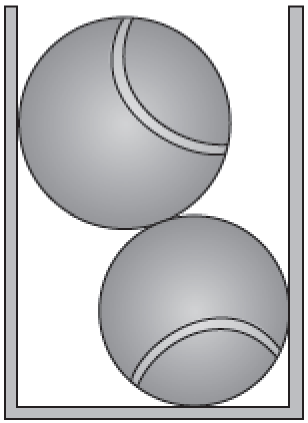
   Krefter er vektorer: retning og størrelse
8. Tegn inn koordinatsystemet.

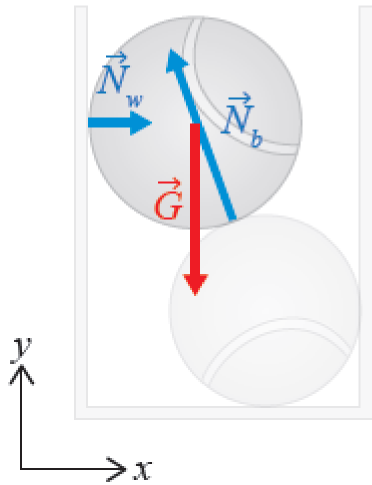
   ofte praktisk å legge en akse langs bevegelsesretning



Eksempel

Tegn et fri-legeme diagram for den øverste ballen.





system: øvre ballen
omgivelse: nedre ballen, karet

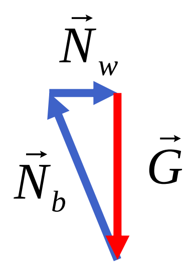
kontaktpunkter

kontaktkrefter:
normalkraft fra vegg på ball
normalkraft fra nedre ball på øvre ball

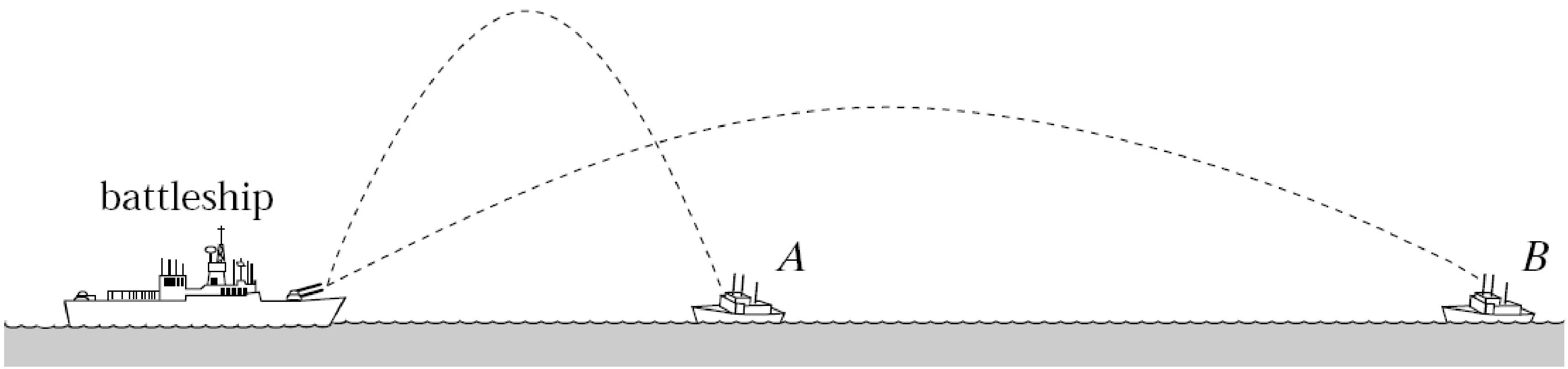
langtrekkende kraft:
gravitasjon

system er i ro:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_w + \vec{N}_b + \vec{G} = m\vec{a} = 0$$



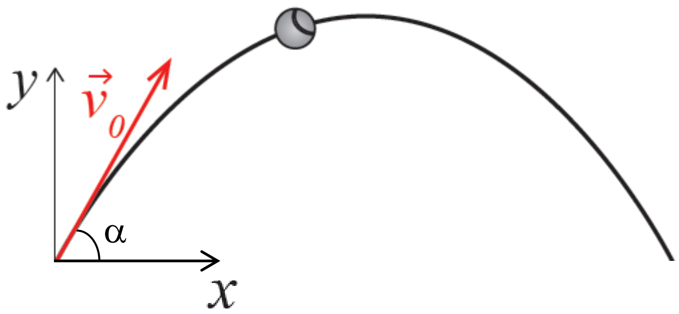
Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip.
Anta at granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



Vi prøver å løse problemet systematisk.

Skrått kast

Et prosjektil skytes ut fra bakkenivå med fart v_0 og vinkelen α med horisontalen.



system: prosjektil
omgivelse: luft

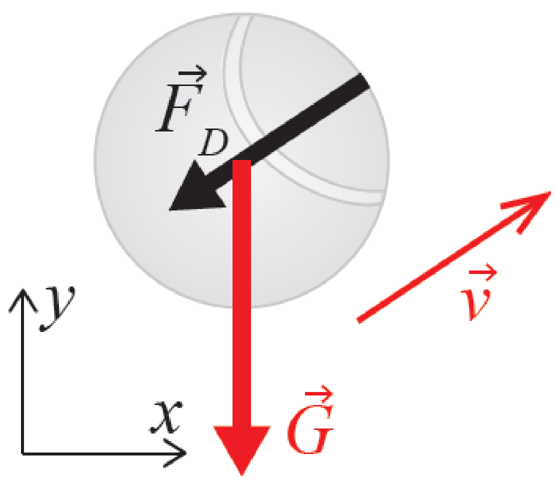
koordinatsystem: x horisontal, y vertikal

initialbetingelser: $\vec{r}(0) = \vec{0}$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\,\hat{j}$$

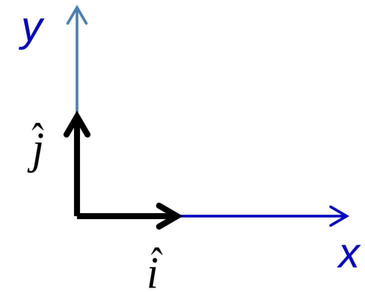
kontaktkrefter:
- ➢ luftmotstand

langtrekkende kraft
- ➢ gravitasjon



Det kan være nyttig å tegne hastighetsvektoren i et fri-legeme diagram.
Du må ikke blande hastighet og kraft vektorer!
$\Rightarrow$ Hastighetsvektoren må ikke berøre systemet.

Forenkelt modell: vi ser bort fra luftmotstanden: $\vec{F}_{\mathrm{D}} = \vec{0}$
(Vi inkludere luftmotstanden senere.)



gravitasjon er konstant på jordoverflaten: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

Newtons andre lov: $\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{G} = -mg\,\hat{j} = m\vec{a}$

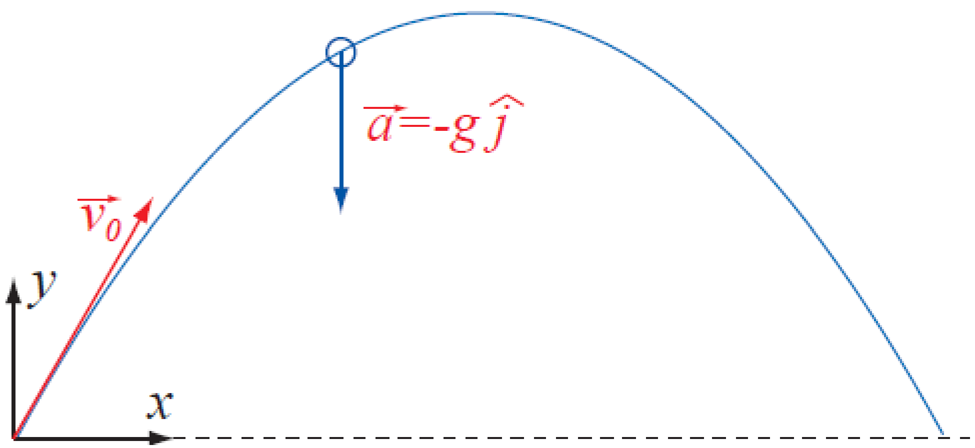
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{net}}}{m} = -g\,\hat{j}$$

Dekomponering i x og y retning:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

kast uten luftmotstand:
ingen akselerasjon i x retning



Vi finner hastigheten ved å integrerer akselerasjonen: $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

initialbetingelse: $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\,\hat{j}$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt = \int_0^t (-g\,\hat{j})\,dt = -gt\,\hat{j}$$

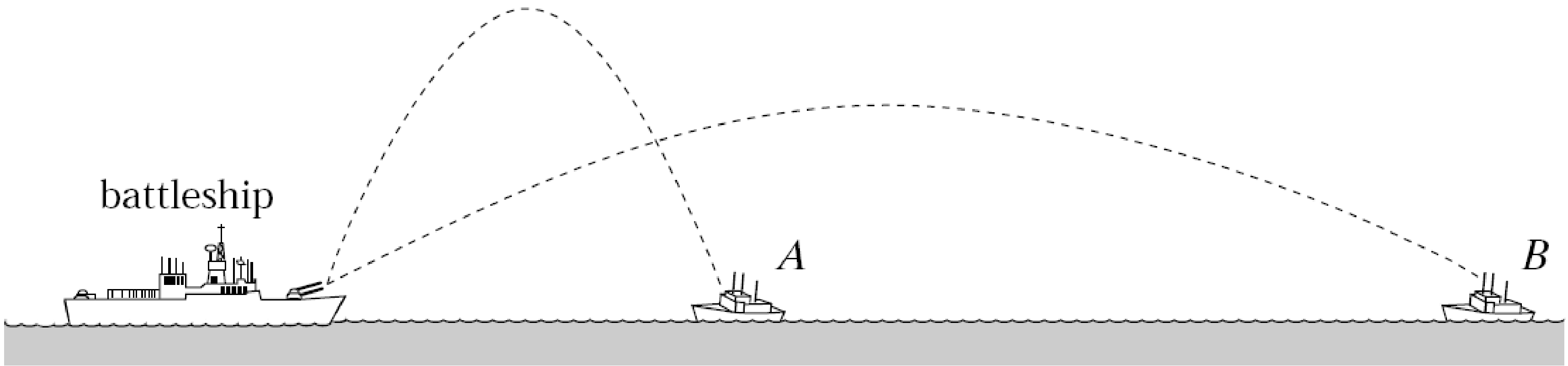
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_{0,x}\,\hat{i} + v_{0,y}\,\hat{j} - gt\,\hat{j} = v_0 \cos(\alpha)\,i + \left(v_0 \sin(\alpha) - gt\right)\hat{j}$$

På komponentform: $v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$

$$v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip.
Anta at granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



Hjelper hastigheten for å finne ut hvilket skip blir truffet først?

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$$
$$v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Hastigheten i x retning er konstant og jo større jo mindre vinkelen er.

Men skip A ligger mye nærmere...

Vi finner banen ved å integrerer hastigheten: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{j}$

initialbetingelse: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = \int_0^t (\vec{v}_0 - gt\,\hat{j})\,dt = \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j}$$

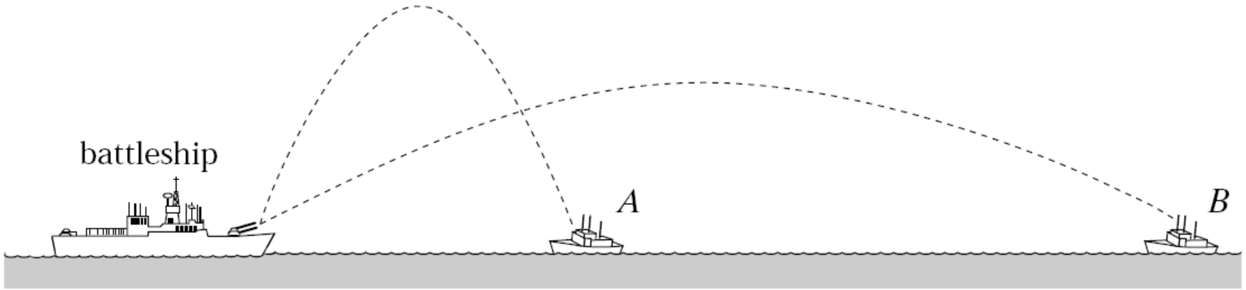
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j} = v_0\,t\cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0\,t\sin(\alpha)\,\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = v_0\,t\cos(\alpha)\,\hat{i} + \left(v_0\,t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$$

På komponentform: $x(t) = v_0\,t\cos(\alpha)$

$$y(t) = v_0\,t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip.
Anta at granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



Vi har funnet lengden og høyden som funksjon av tiden:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

Prosjektilet treffer skipet ved tiden t_1: $\quad y(t_1) = 0$

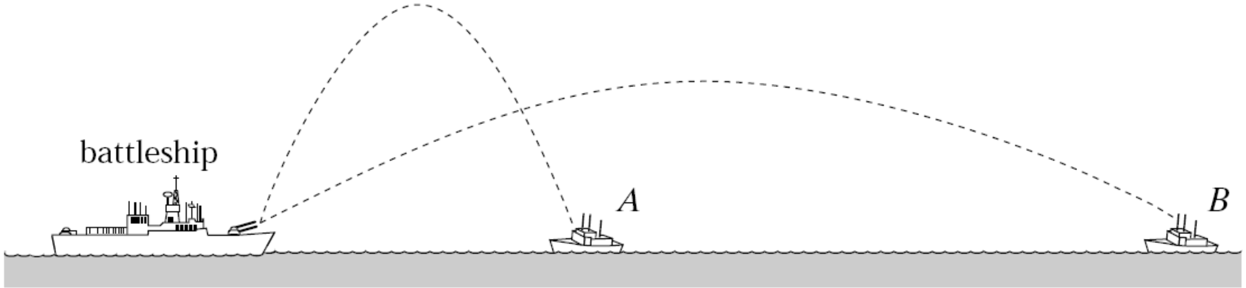
$$v_0 t_1 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

$t_1 \neq 0$ $\quad v_0 \sin(\alpha) = \frac{1}{2} g t_1$

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Jo mindre vinkelen jo kortere tid for å treffe skipet.
Skip B blir truffet først.

Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip.
Anta at granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



Vi har brukt oppskriften: funnet krefter, løst bevegelsesligninger...
det er trygt metode og man kan være sikker å finne svaret.

Besvarelse som trenger litt erfaring:

- bevegelsen i x og y retning er koblet fra hverandre
- parabolsk bane er symmetrisk: det tar like lang tid å komme opp som ned
- jo høyere høydepunktet jo lengre tid tar det å falle ned

Velg vinkelen med horisontalen slik at prosjektilet kommer lengst mulig.

Ballen treffer bakken ved tiden t_1:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

x komponent av posisjon ved tid t_1:

$$x(t_1) = v_0\, t_1 \cos(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

vi deriverer for å finne maksimum:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

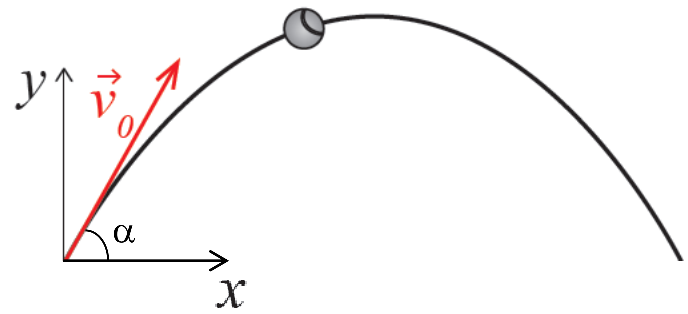
$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha = 1$$

$$\alpha = 45°$$

Prosjektilet kommer lengst med α=45°.

Vis at prosjektilet beveger seg på en parabelbane.



Vi har løst bevegelsesligninger og
funnet banen som funksjon av tiden.

$$\vec{r}(t) = v_0 t\cos(\alpha)\,\hat{i} + \left(v_0 t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$$

for å se at banen er en parabel:
uttrykk vertikalkomponenten y som
funksjon av horisontalkomponenten x

$$x(t) = v_0\, t\cos(\alpha) \qquad y(t) = v_0\, t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \qquad y = v_0\frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = ax + bx^2$$

Numerisk løsning

fra definisjonen: $$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

for små tidssteg Δt: $$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta t$$

i Matlab:

```
v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a(i,:);
```

for hastighet: $$\vec{v}(t) \approx \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\Delta t$$ Euler metode

$$\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t) + \vec{v}(t+\Delta t)\,\Delta t$$ Euler-Cromer metode

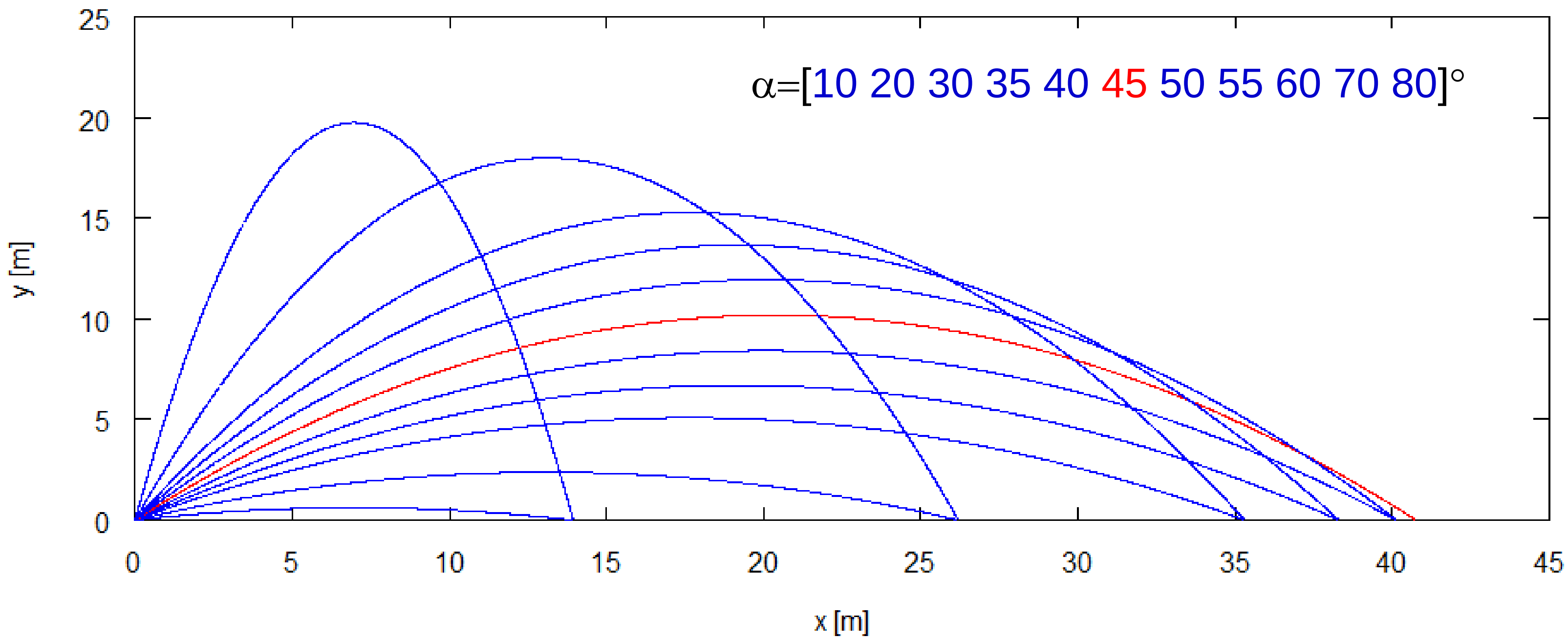
i Matlab:

```
r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
```

Numerisk løsning

```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
h = 0.0; % m
r0 = [0 h];
v0norm = 20.0;
alpha = 45.0*pi/180.0;
v0 = v0norm*[cos(alpha) sin(alpha)];
time = 10.0; % s
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
while (r(i,2)>=0.0)
    Fnet = - m*g*[0 1];
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
plot(r(1:i,1),r(1:i,2));
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```



Som forventet kommer prosjektilet lengst når vi velger α=45°.

Prosjektilet kommer like langt ved α og 90°– α: $x(t_1) = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Kommer prosjektilet også lengst med α=45° hvis vi skyter fra en høyde *h* > 0?

Kommer prosjektilet også lengst med α=45° hvis vi skyter fra en høyde h > 0?

Det er vanskelig å regne ut analytisk:

$$y(t_1) = 0$$

$$h + v_0\, t_1 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

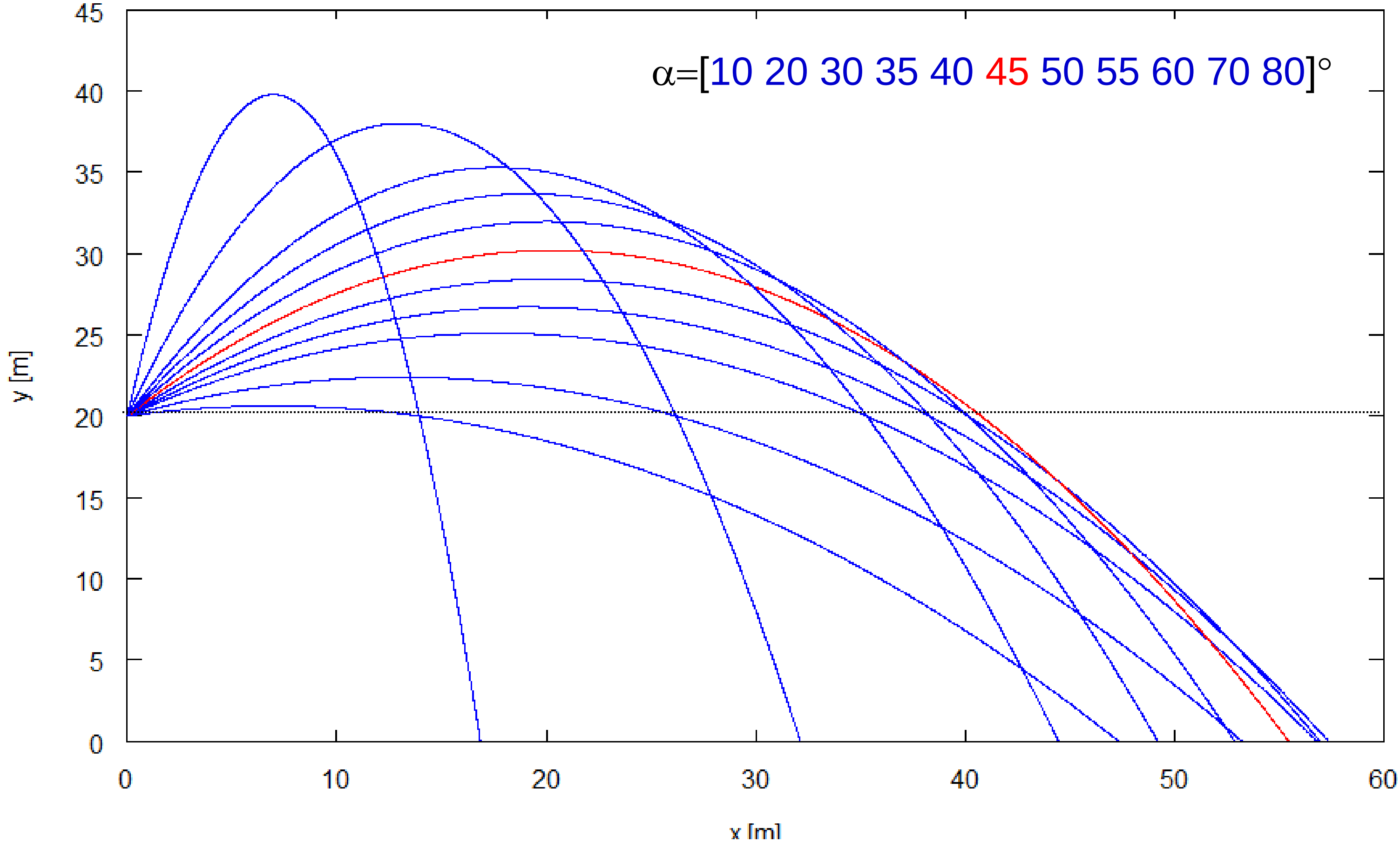
$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$x(t_1) = v_0\, t_1 \cos(\alpha)$$

og så må vi finne maksimum...

Det er lett å gjøre numerisk:

```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
h = 20.0; % m
r0 = [0 h];
v0value = 20.0;
```



Hvis du skyter fra en høyde *h* over bakken,
så er det bedre å bruke mindre enn 45°.

For å finne den optimale vinkelen kan
vi bruke en sløyfe til som varierer α.