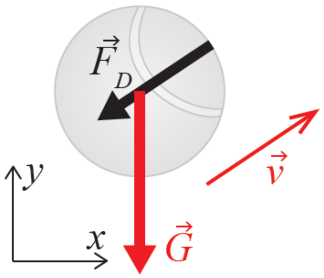
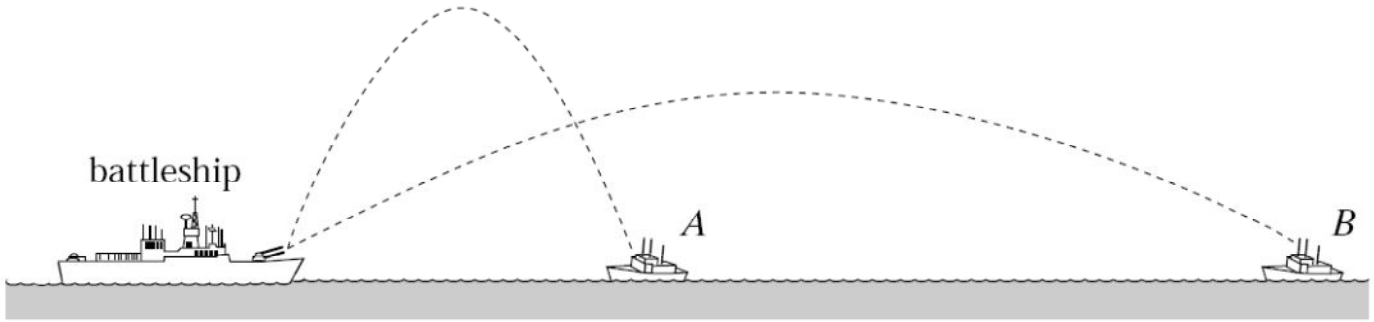
Newtons lover i to og tre dimensjoner

07.02.2013

innlevering:
bruk riktige boks !

Skrått kast





initialbetingelser: $\vec{r}(0) = \vec{0}$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\,\hat{j}$$

kontaktkraft: luftmotstand
langtrekkende kraft: gravitasjon

først: forenkelt modell: bare gravitasjon, ingen luftmotstand $\vec{F}_\mathrm{D} = \vec{0}$

$$\vec{G} = -mg\,\hat{j}$$

Newtons andre lov: $\vec{F}_\mathrm{net} = \vec{G} = -mg\,\hat{j} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_\mathrm{net}}{m} = -g\,\hat{j}$$

integrasjon av akselerasjon

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{j}$$

integrasjon av hastighet

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j}$$

sett inn initialbetingelser: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j} = v_0 t \cos(\alpha) \hat{i} + \left(v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$

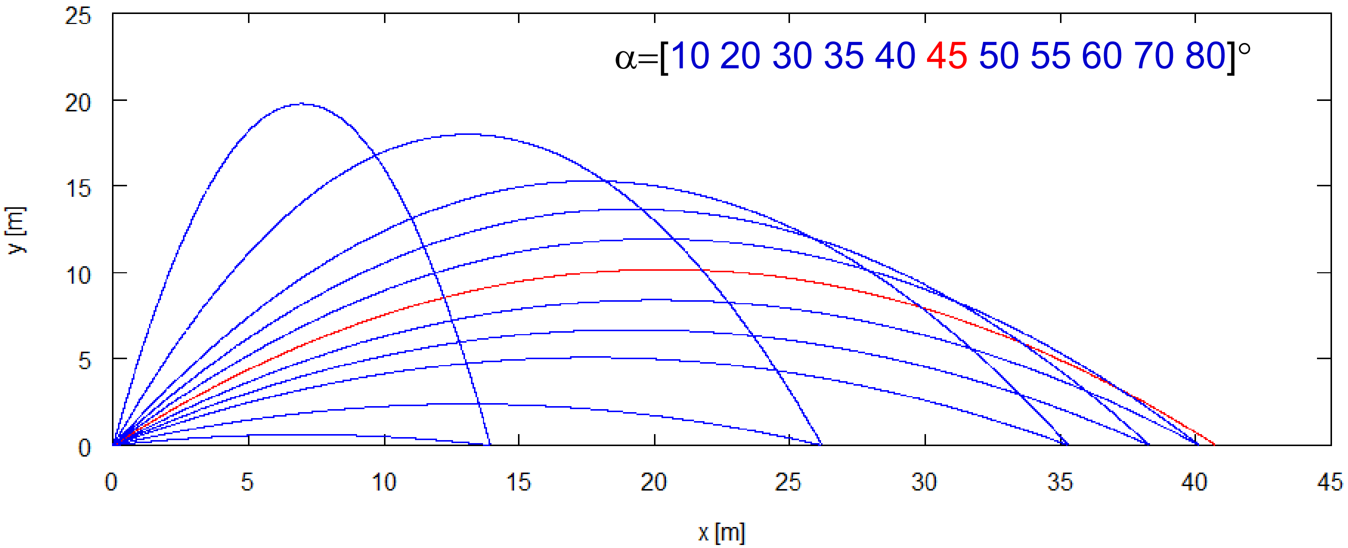
finn tid t_1 når prosjektilet er på y = 0: $v_0 t_1 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

finn x posisjon når y = 0: $x(t_1) = v_0 t_1 \cos(\alpha) = \frac{2 v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

funksjon $x(\alpha)$ har et maksimum ved $\alpha = 45°$

numerisk integrasjon:



Hvis du skyter fra en høyde *h* over bakken: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = h\,\hat{j}$

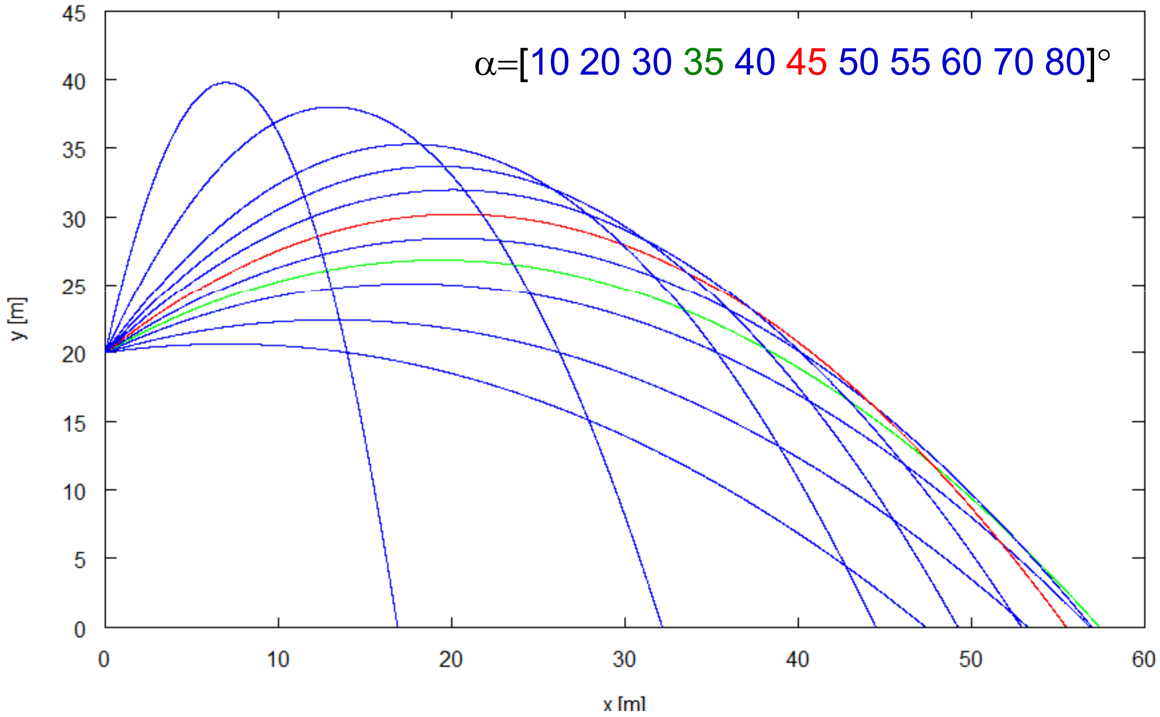
Vi kan fortsatt beregne banen analytisk,
men det er vanskelig å finne vinkelen
som maksimerer lengden.

like lett å
gjøre numerisk:

initialbetingelser:

$y_0 = 20\,\mathrm{m}$

$|\vec{v}_0| = 20\,\mathrm{m/s}$



Vi kan finne den maksimale lengden ved variasjon av α:

$\alpha_{\max} = 35.4^\circ$

$x_{\max} = 57.39\,\mathrm{m}$

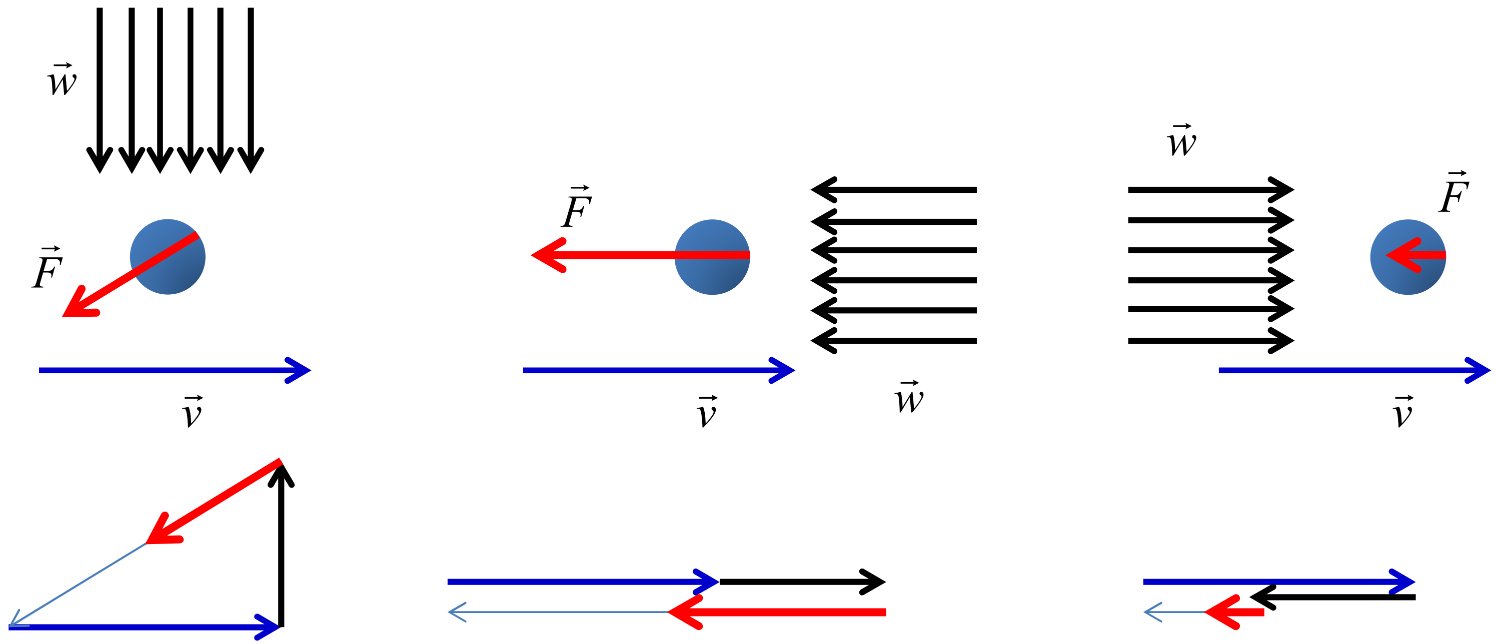
Skrå kast med luftmotstand

Vi har allerede diskutert to modeller for viskøs kraft:

lineær luftmotstand:

for små hastighet: $\vec{F} = -k_v \vec{v}$

hvis luft bever seg med hastighet $\vec{w}$ $\vec{F} = -k_v (\vec{v} - \vec{w})$



kvadratisk luftmotstand:

for større hastighet: $\vec{F} = -D|\vec{v}|\vec{v}$

hvis luft bever seg med hastighet $\vec{w}$ $\vec{F} = -D|\vec{v}-\vec{w}|(\vec{v}-\vec{w})$

eksempler hvor vi kan bruke kvadratisk luftmotstand:

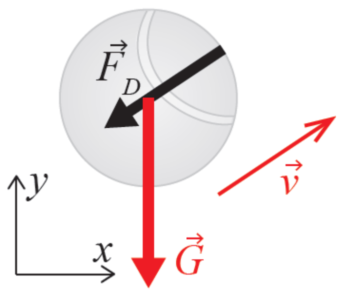
- skutt av en kanonkule
- ballkast
- bil, tog, fly
- ...

eksempler hvor vi kan bruke lineær viskøs kraft:

- fallskjermhopp
- grus i vannet
- ...

Skrå kast med luftmotstand

Fri-legeme diagram:



$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{D}} + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j}$$

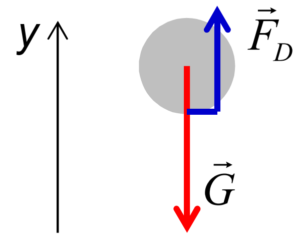
N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} = -\frac{D}{m}|\vec{v}|\vec{v} - g\,\hat{j}$$

spesialfall: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = h\,\hat{j}$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{0}$

endimensjonal,
ball faller ned med gravitasjon,
bremset av luftmotstanden



Luftmotstandskraften øker med hastighet til den blir like stor som gravitasjonskraften:

$$\vec{F}_{\text{net}} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j} = 0$$

akselerasjonen blir null og ballen oppnår terminalhastighet:

$$a_y = \frac{D}{m}v_T^2 - g = 0$$

metode for å finne luftmotstandskoeffisient: måling av terminalhastighet

$$D = \frac{mg}{v_T^2}$$

skrått kast uten luftmotstand: $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

komponenter: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ $\qquad a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$

dekoblet bevegelse: a_x avhenger ikke av y eller v_y
a_y avhenger ikke av x eller v_x

skrått kast med luftmotstand: $\vec{a} = -\dfrac{D}{m}|\vec{v}|\,\vec{v} - g\,\hat{j}$ hvor $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

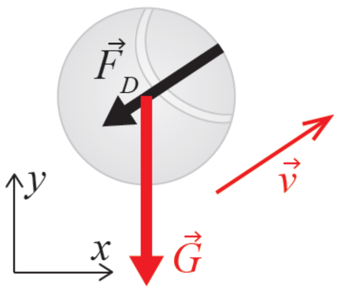
komponenter: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\qquad a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$

koblet bevegelse: $a_x = a_x(v_x, v_y)$ $\qquad a_y = a_y(v_x, v_y)$

vi kan ikke løse bevegelsesligningen for hver komponent separat,
vi må løse bevegelsesligninger for x og y retning samtidlig

det gjører vi best numerisk

Numerisk løsning for skrått kast med luftmotstand



$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{D}} + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

```
Fnet = -D*norm(v(i,:))*v(i,:) - m*g*[0 1];
a = Fnet/m;
v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
```

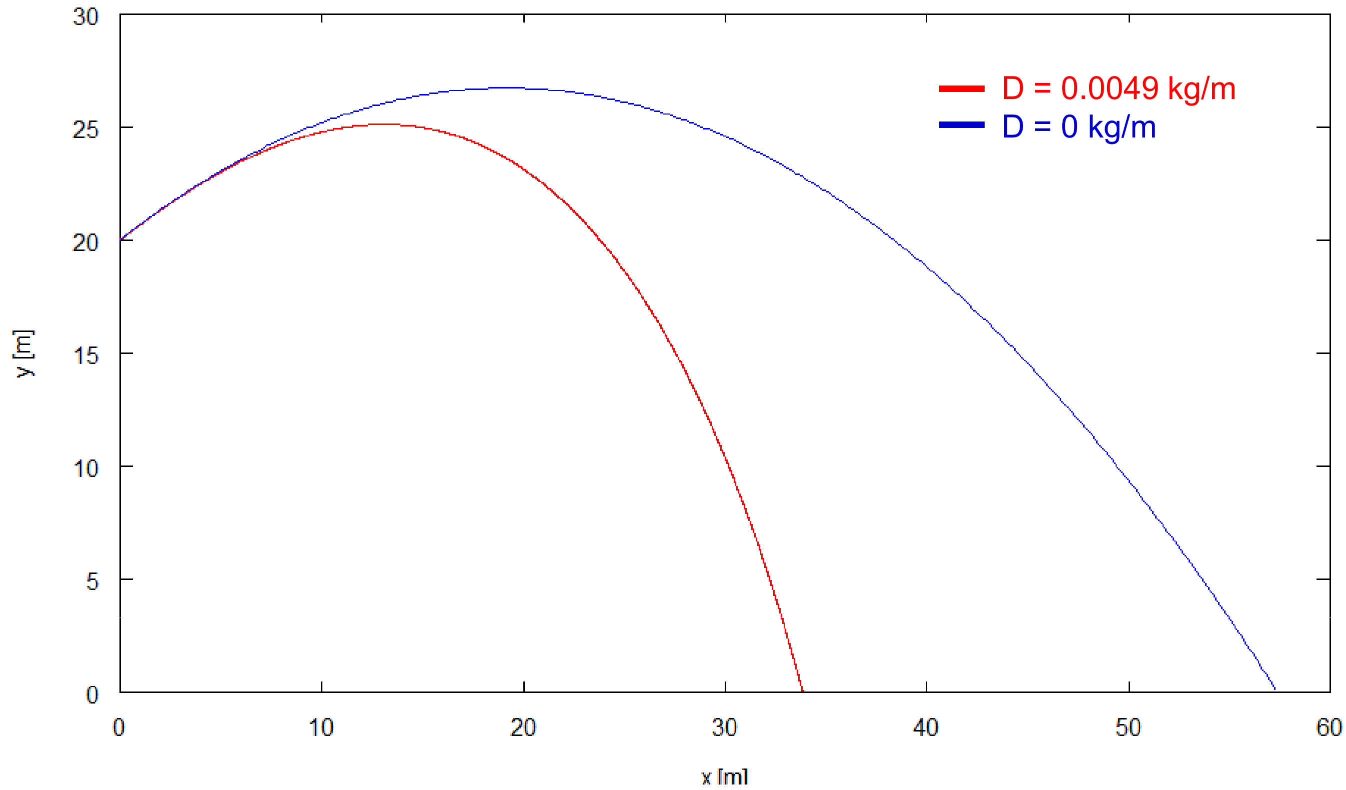
funksjon norm(A) beregner lengden til vektoren A
norm(A) = sqrt(dot(A,A))

Numerisk løsning for skrå kast med luftmotstand

```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
vT = 20.0 % m/s
D = m*g/vT/vT;
h = 20.0; % m
r0 = [0 h];
v0norm = 20.0; % m/s
alpha = 35.0*pi/180.0;
v0 = [v0norm*cos(alpha) v0norm*sin(alpha)];
time = 10.0; % s
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
while (r(i,2)>=0.0)
    Fnet = -D*norm(v(i,:))*v(i,:) - m*g*[0 1];
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
printf("%f\n", t(i));
plot(r(1:i,1),r(1:i,2),'-r');
```

Resultat



initialbetingelser:

$h = 20\,\text{m}$

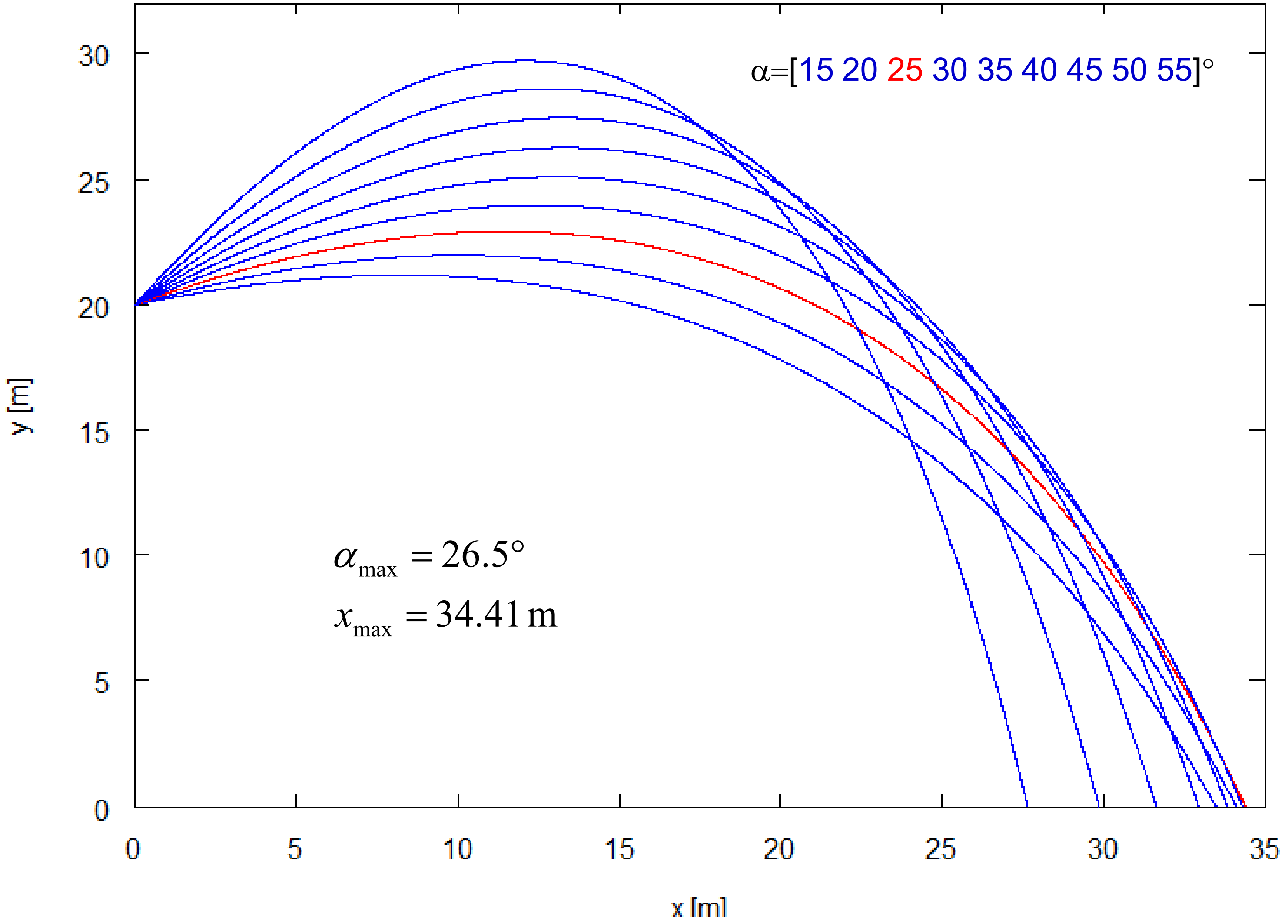
$v_0 = 20\,\text{m/s}$

$\alpha = 35°$

prosjektilet beveger seg ikke lenger på en parabolsk bane

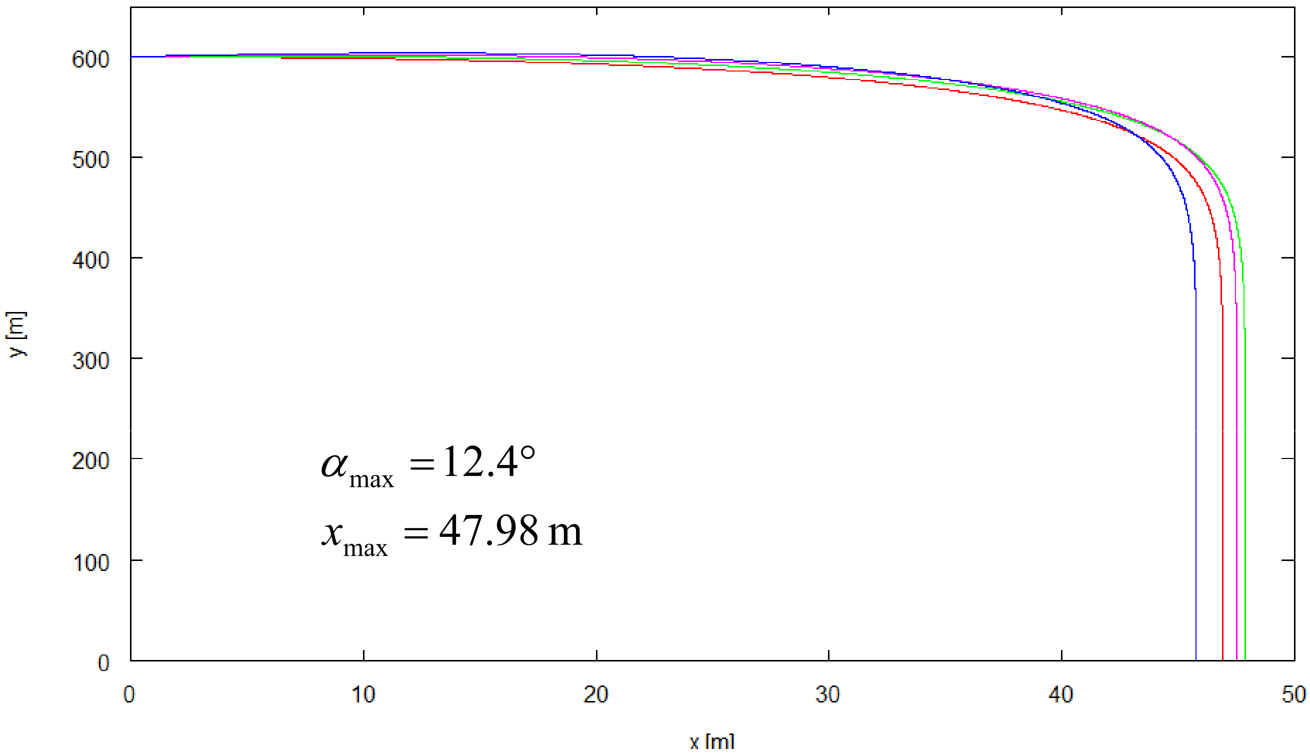
ikke vanskelig å implementere luftmotstanden numerisk,
men analytisk løsning blir meget komplisert.

hva betyr luftmotstand for den beste vinkelen?



obs: Vi har funnet beste vinkelen for gitt initialbetingelser og parameter: h, v_0, D !

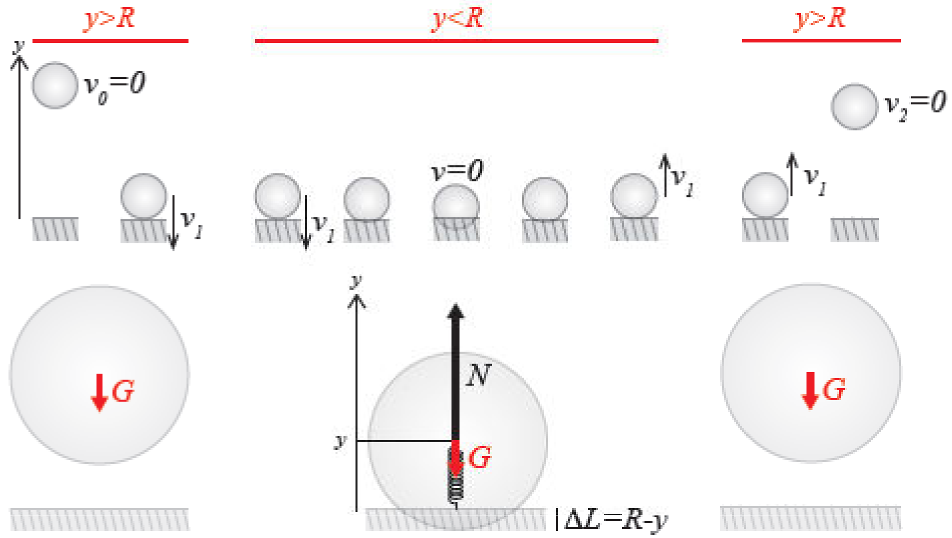
Hvilken vinkel burde jeg bruke for å kaste lengst fra Prekestolen?
(Samme initialhastighet og luftmotstand, men *h* = 600 m.)



Hvis høyden er stor må du bruke en mindre vinkel for å komme lengst.
På slutten faller ballen ned vertikal $\Rightarrow$ over en viss høyde er α_{max} konstant.
Den eneste måte å kaste lenger er å øke v_0.

Skrått ballkast med luftmotstand: hva skjer etter ballen treffer på gulvet? Kan vi beskrive bevegelsen videre?

Vi har allerede modellert en ball som spretter fra gulvet i én dimensjon.



Normalkraften oppstår hvis: $y(t) < R$

Ballen deformeres
$\Rightarrow$ vi modellerer normalkraften
som en fjærkraft:

$$\vec{N} = \pm k\,\Delta L\,\hat{j}$$

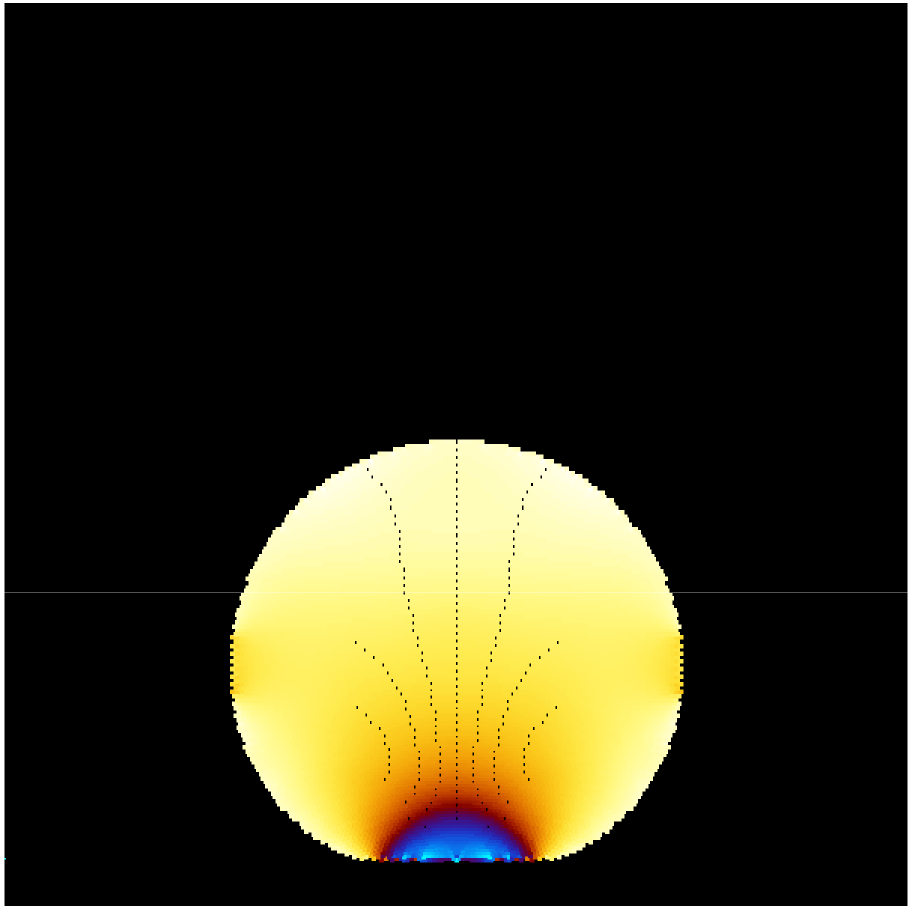
$$\Delta L = R - y(t) > 0$$

$$\vec{N} = +k\left(R - y(t)\right)\hat{j}$$

Normalkraften virker alltid vertikal oppover uansett i hvilke retning ballen beveger seg.

$$\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \le R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$$

feil tegn i læreboken s.149



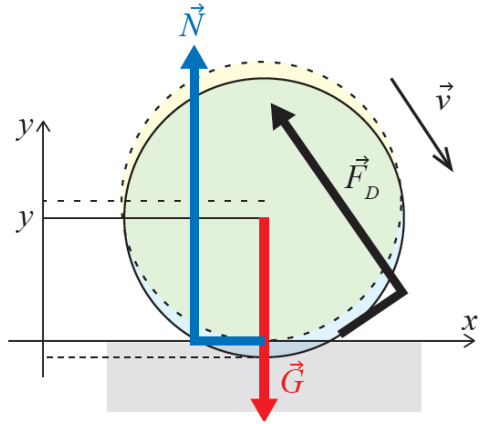
husk:
å modellere normalkraften som en lineær fjærkraft er bare en tilnærming!

krefter som oppstår når ballen (og gulvet) deformeres kan være mer komplisert.

fri-legeme diagram:

kontaktkrefter:
- luftmotstand
- normalkraft

langtrekkende kraft:
- gravitasjon



alle krefter har årsak i omgivelsen og virker på systemet (=ball)

kraftmodeller:

luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

fra luften på ballen,
hastighetsavhengig,
motsatt bevegelsesretning

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \leq R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$

fra gulvet på pallen,
posisjonsavhengig,
oppover (vinkelrett på gulvet)

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

fra jorden på ballen
konstant,
nedover (mot jordens sentrum)

luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

```
FD = - D*norm(v(i,:))*v(i,:);
```

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \le R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$

```
if (r(i,2)<R)
    N = k*(R-r(i,2))*[0 1];
else
    N = [0 0];
end
```

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

```
G = -m*g*[0 1];
```

N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_D + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{\text{m}}$$

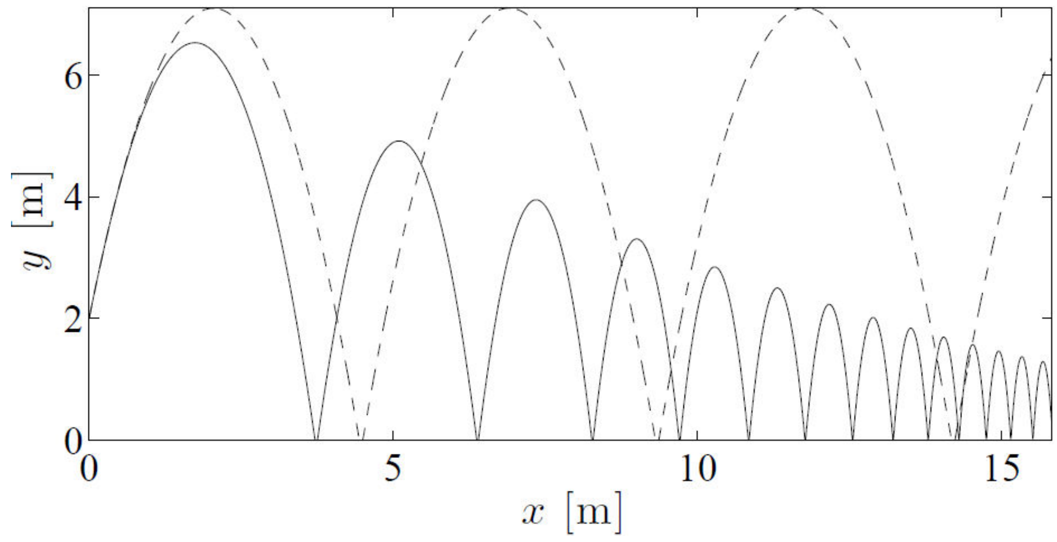
```
Fnet = N + FD + G;
a = Fnet/m;
```

Numerisk løsning:

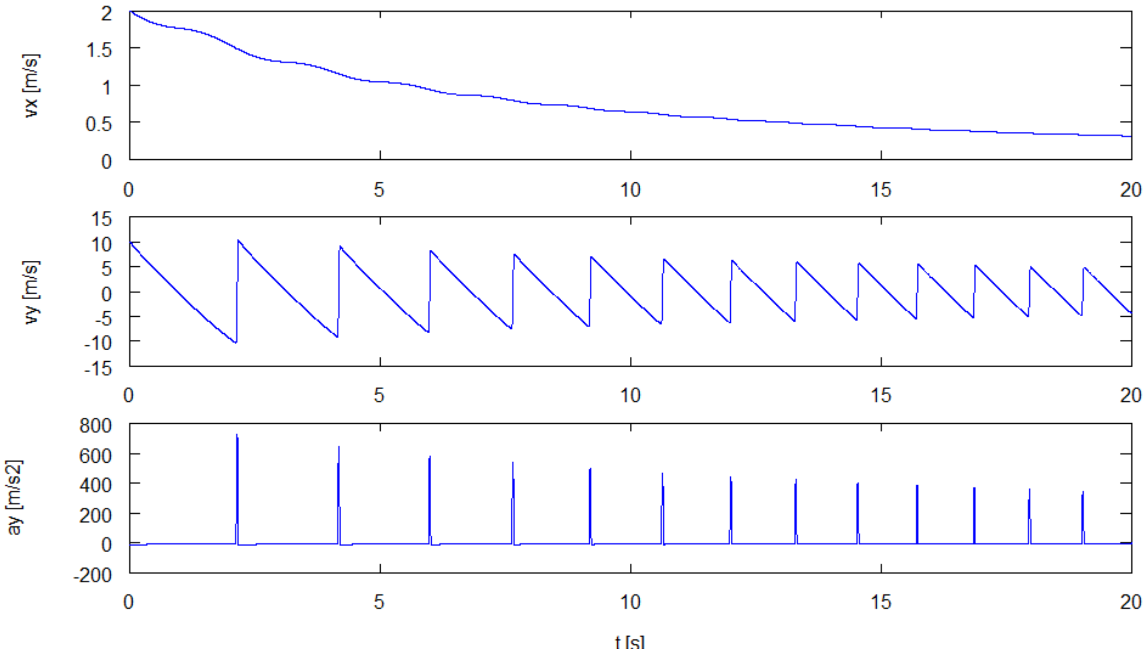
```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
vT = 20.0; % m/s
h = 2.0; % m
R = 0.1; % m
k = 1000.0; % N/m
r0 = [0 h];
v0 = [2.0 10.0]; % m/s
time = 20.0; % s
% Variables
D = m*g/vT^2;
%D = 0.0;
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
for i = 1:n-1
    if (r(i,2)<R)
        N = k*(R-r(i,2))*[0 1];
    else
        N = [0 0];
    end
    FD = - D*norm(v(i,:))*v(i,:);
    G = -m*g*[0 1];
    Fnet = N + FD + G;
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2));
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```

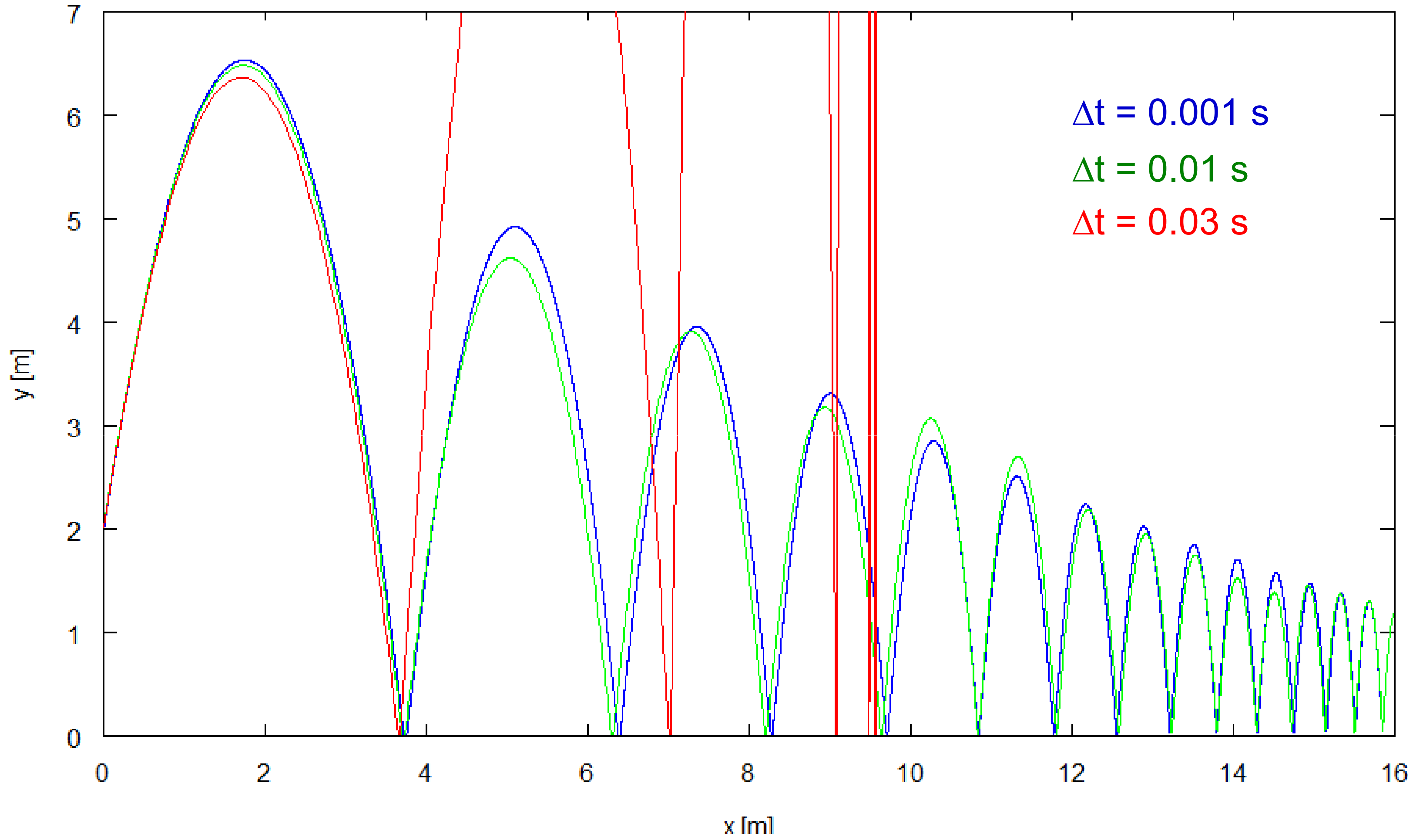
Resultat (med og uten luftmotstand)



dempet bevegelse
i x og y retning

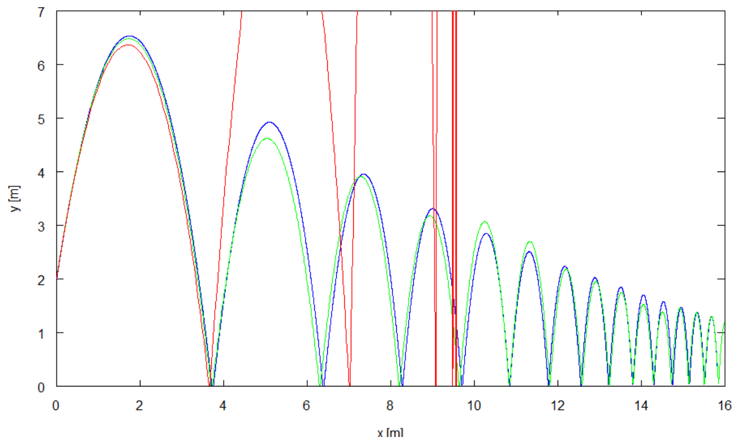


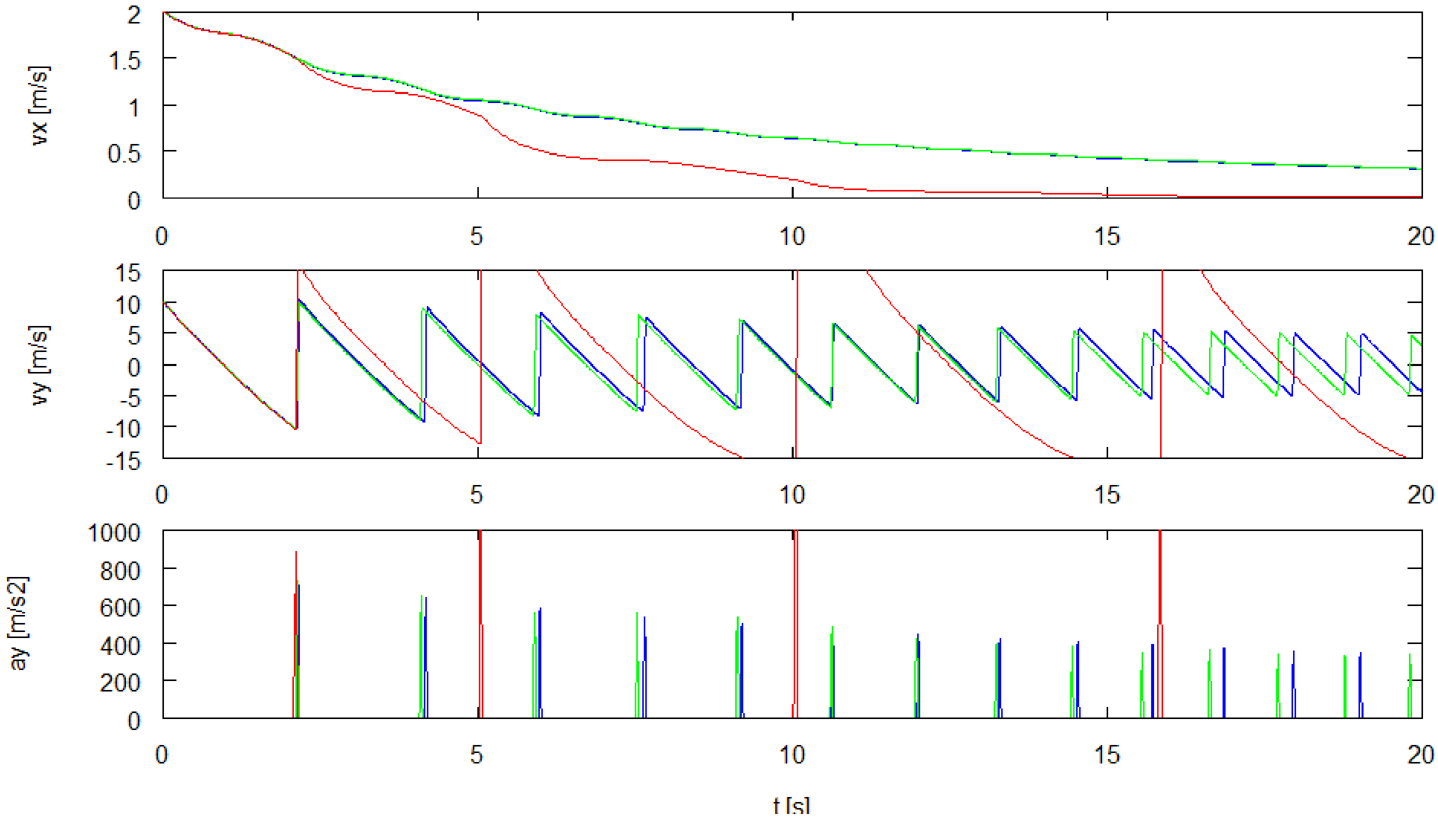
valg av tidssteg



valg av tidssteg

Normalkraften er stor og virker i kort tidsintervall.
Bevegelse i luft: jevnt uten store forandringer;
store forendringer mens i kontakt med bakken.

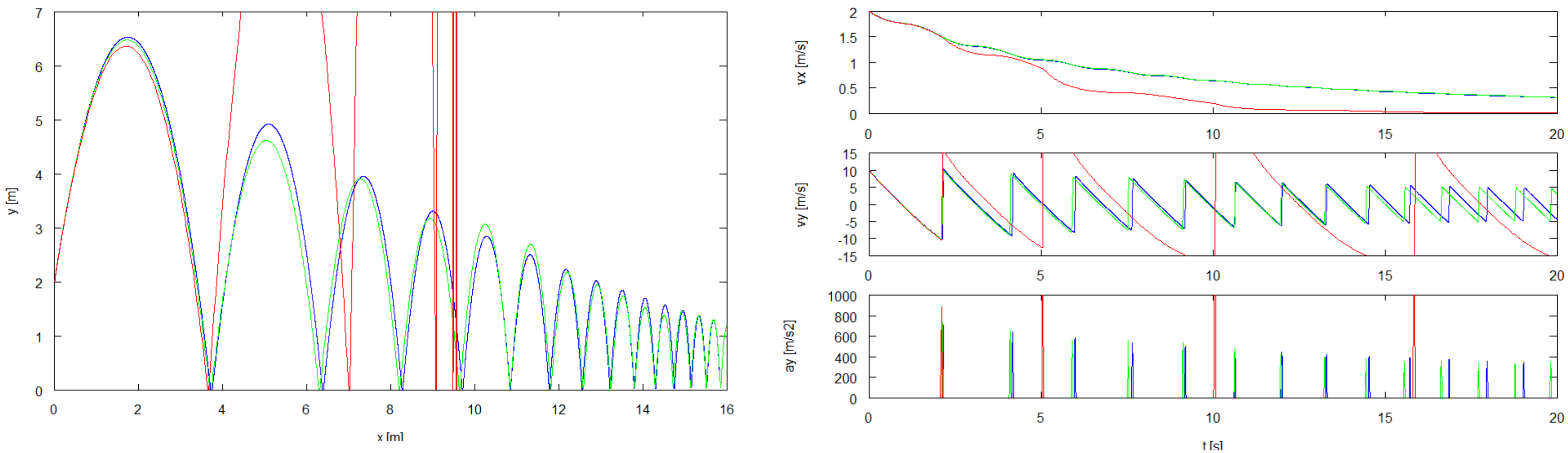


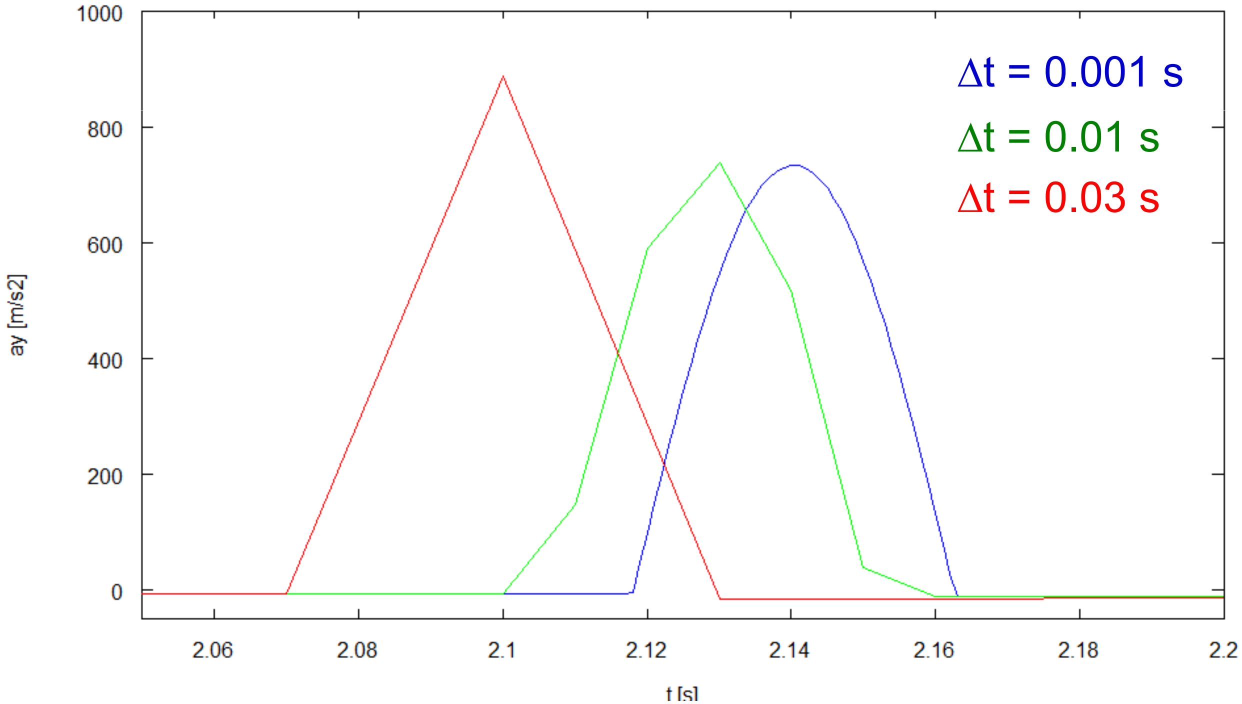


$\Delta t = 0.001$ s

$\Delta t = 0.01$ s

$\Delta t = 0.03$ s



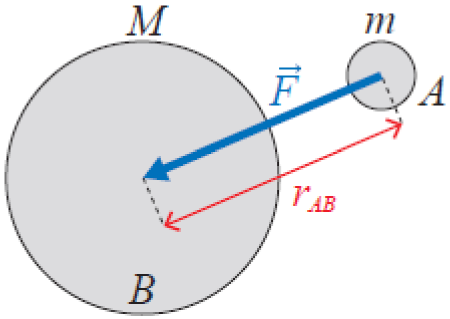


$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

for små tidssteg Δt:

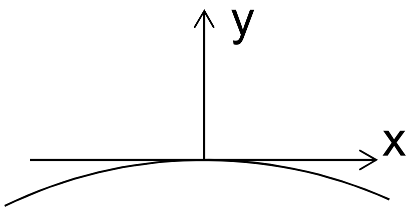
$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Gravitasjon



generell: $$\vec{F}_G = \gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

Hittil har vi sett på objekter på jordens overflate:
- *M* og *r* er konstant.
- Vi betrakter en lokal begrenset del av jordoverflaten.
  - vi neglisjerer krumning
  - kartesisk koordinatsystem



$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{j} = mg\,\hat{j} \qquad g \approx 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hvis vi ser på planetes baner eller kometer,
så må vi bruke den generelle gravitasjonsloven.

Eksempel

En komet med masse m beveger seg gjennom solsystemet.

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

system: kometen
omgivelse: solen, planetene, andre stjerner
(vi kan neglisjere planetene og andre stjerner – hvorfor?)

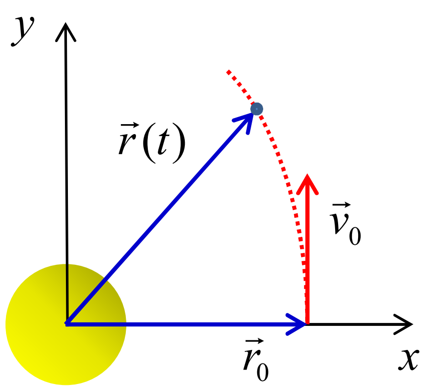
initialbetingelser: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

koordinatsystem:

- vi velger origo i solens sentrum
- vektorer $\vec{r}_0$ og $\vec{v}_0$ definerer en plan flate
- kometen bever seg i denne flaten
- problemet er todimensjonal
- vi velger x og y aksen slik at $\vec{r}_0 = r_0 \, \hat{i}$

$\vec{v}_0 = v_0 \, \hat{j}$

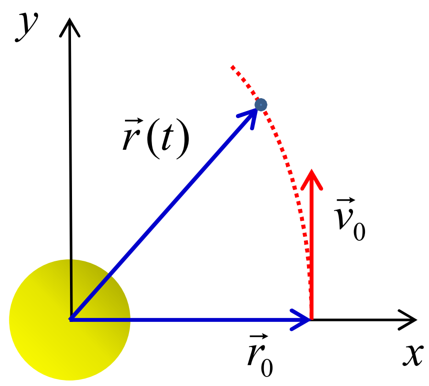


Modeller:

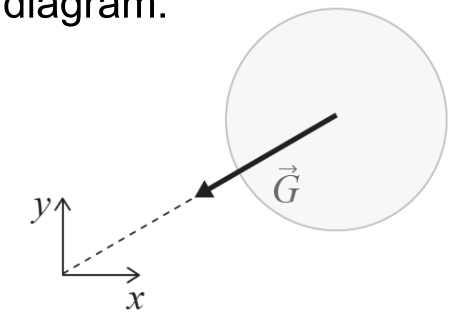
Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.



fri-legeme diagram:



Gravitasjonen virker fra solen (omgivelse) på kometen (systemet). Kraften er rettet mot solen, som befinner seg i origo.

$$\vec{F}_\mathrm{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

Kometen beveger seg gjennom det interstellare rommet, den er ikke i kontakt med noe, den eneste kraften er gravitasjon.

solmasse: $M = 1.99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$

N2L: $\vec{F}_\mathrm{net} = \vec{F}_\mathrm{G} = -\gamma \dfrac{mM}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r}$$

Masse til planetene er mye mindre enn solmassen, men kraft kan være stor dersom kometen passerer i nærhet av en planet. Andre stjerne er langt borte, slik at deres gravitasjon er neglisjerbart.

vi løser numerisk: $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma \dfrac{M}{r^3}\vec{r}$

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

```
% Physical values
M = 1.99e30; % kg
G = 6.673e-11; % m^3 kg^-1 s^-2
% Initial conditions
R = 1.5e11; % m
r0 = R*[1 0];
v0mag = 3e4; % m/s
v0 = v0mag*[0.0 1.0];
% Numerical values
time = 60*60*24*365*1.5; % s
dt = 100; % s
% Setup Simulation
n = ceil(time/dt)
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
GM = G*M;
```

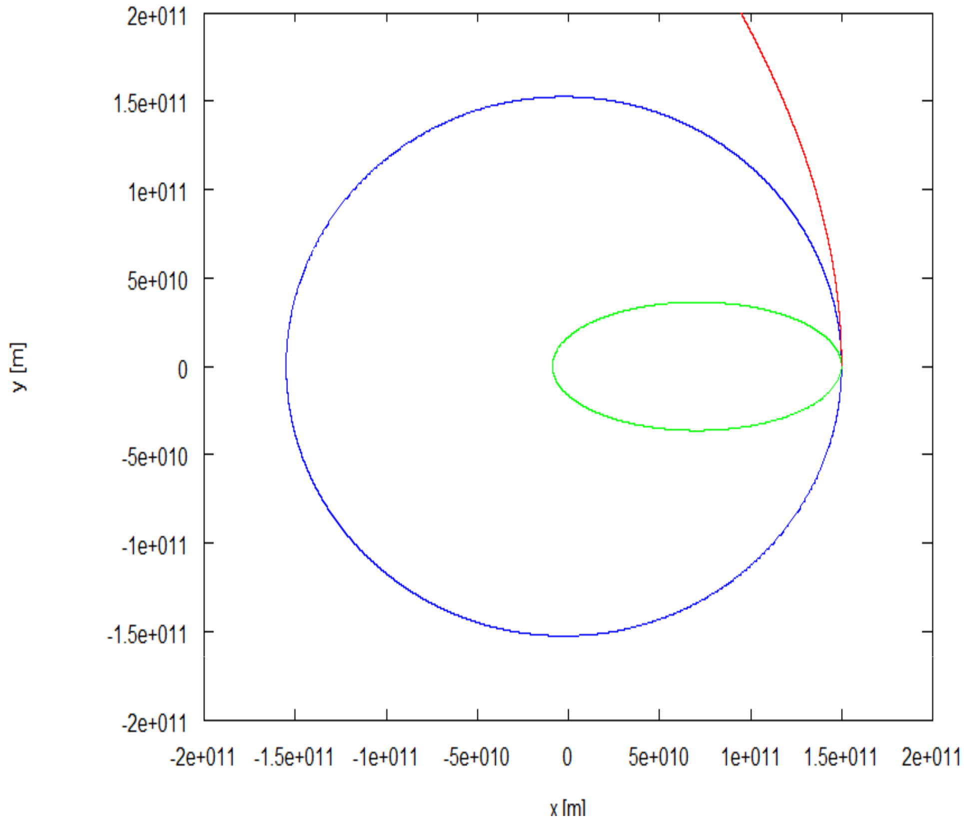
```
% Calculation loop
for i = 1:n-1
    rr = norm(r(i,:));
    a = -GM*r(i,:)/rr^3;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2),':');
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```

Analyser:

Er resultatene for $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ fornuftig?

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.



$$\vec{r}_0 = x_0 \ \hat{i}$$

$$x_0 = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \ \hat{j}$$

$v_0 = 4.5 \cdot 10^4$ m/s
$v_0 = 3.0 \cdot 10^4$ m/s
$v_0 = 1.0 \cdot 10^4$ m/s

stor initialhastighet:

- kometen blir avbøyet men passerer gjennom solsystemet i det interstellare rommet

for en spesifikk mellomstor initialhastighet:

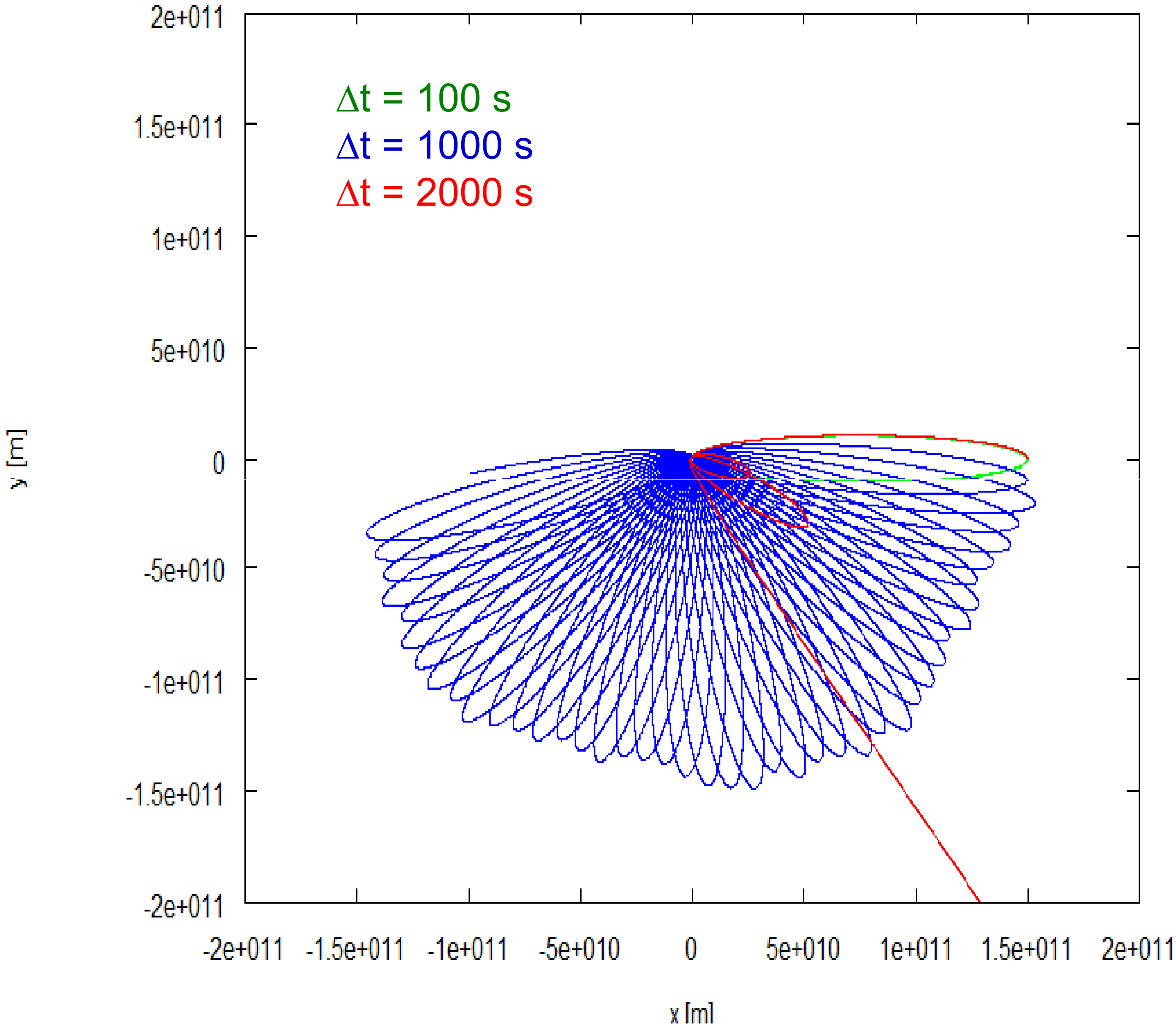
- kometen beveger seg på en sirkelbane rund solen

for små hastigheter:

- kometen beveger seg på en elliptisk bane rund solen

viktig å velge små tidskritt.
her: T = 1.5 a
Δt = 100 s

Effekt av for stor tidssteg



$$\vec{r}_0 = x_0 \, \hat{i}$$

$$x_0 = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \, \hat{j}$$

$$v_0 = 3 \cdot 10^{3} \text{ m/s}$$