Arbeid og potensiell energi

26.02.2013

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt$

$$W_{0,1} = \int_0^1 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$$

arbeid-energi teorem $W_{0,1} = K_1 - K_0$

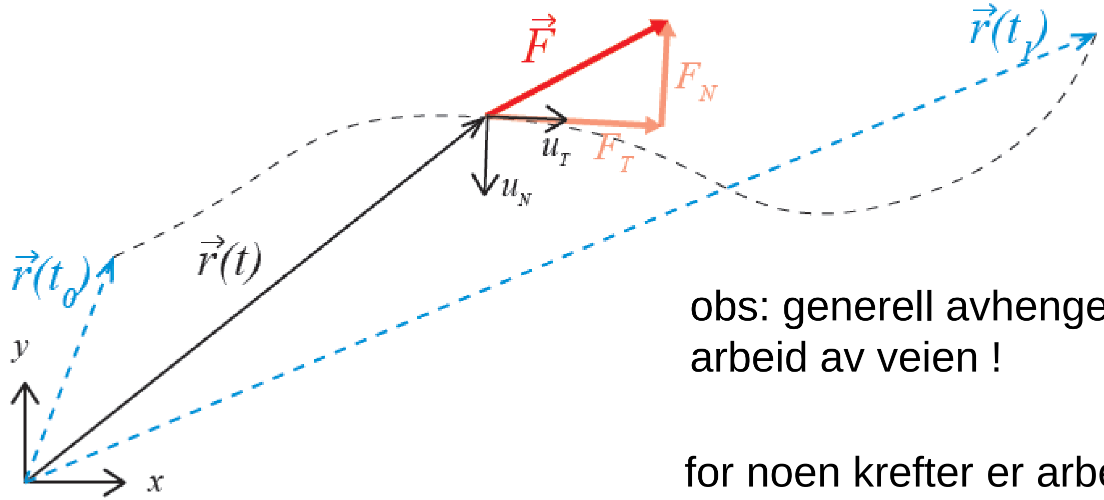
kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

arbeid er tilført mekanisk energi

kurveintegral langs en kurve *C*

start i $\vec{r}(t_0)$

slutt i $\vec{r}(t_1)$



obs: generell avhenger arbeid av veien !

for noen krefter er arbeidet uavhengig av veien

kriterium?

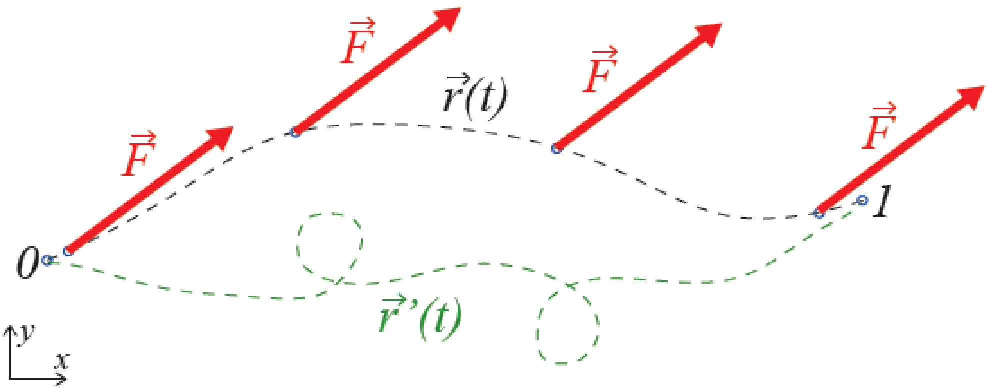
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N) \cdot v \hat{u}_T = F_T\, v$$

bare kraften i tangensialretning bidrar til arbeidet
normalkraften gjør ingen arbeid

Arbeid av en konstant kraft

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \vec{r} dt = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

For en konstant kraft er arbeidet ikke avhengig av veien:



En kraft med denne egenskapen heter **konservativ**.

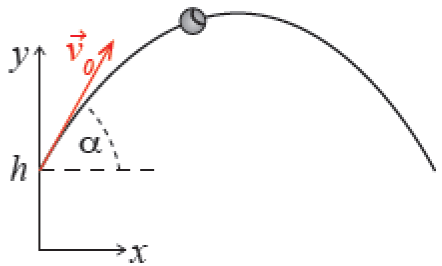
eksempel for en konservativ kraft: gravitasjon

generell: krefter som bare avhenger av posisjonen

eksempler for krefter som er ikke konservativ: friksjon, luftmotstand

generell: krefter som er hastighetsavhengig

Eksempel: skrått kast uten luftmotstand



gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

konstant kraft: $W = \vec{G} \cdot \Delta\vec{r} \; = -mg\,\hat{j} \cdot (\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}) = -mg\Delta y$

arbeid-energi teorem: $W = K_1 - K_0$

$$-mg(y_1 - y_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

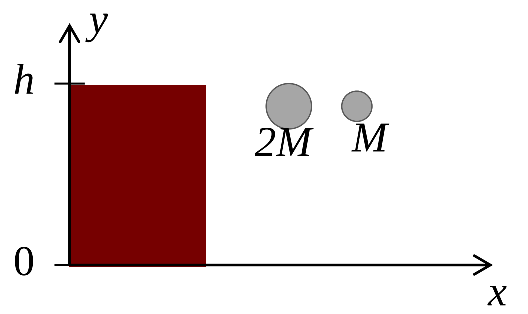
$$v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 = v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

ingen horisontal kraft: $v_{x,1} = v_{x,0}$

$$v_{y,1}^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

$$v_{y,1} = \pm\sqrt{v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)}$$

To baller med masse *M* og *2M* slippes fra taket på fysikkbygningen. (Vi ser bort fra luftmotstanden.) Rett før de treffer bakken har den tyngre ballen:



1. Halvparten av den kinetiske energien til den lettere ballen
2. Den samme kinetiske energien som den lettere ballen
3. Det dobbelte av den kinetiske energien til den lettere ballen
4. Fire ganger så stor kinetisk energi som den lettere ballen

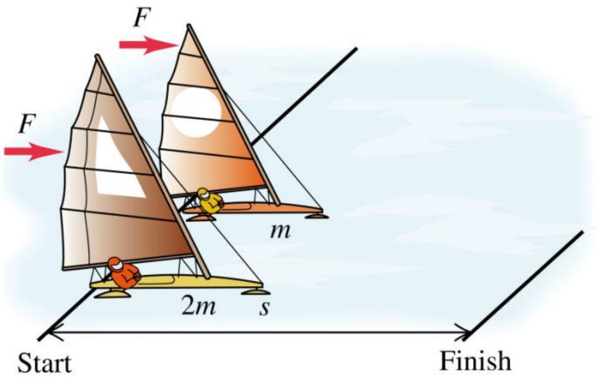
$$W = \int_h^0 F_G \, dy = \int_h^0 (-mg)\, dy = -mg(0-h) = mgh$$

arbeid-energi teorem: $W = K_1 - K_0$ $\qquad K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad K_0 = 0$

ball med masse $m=M$: $\quad K_1 = Mgh \qquad \frac{1}{2} M v_1^2 = Mgh \qquad v_1^2 = 2gh$

ball med masse $m=2M$: $\quad K_1 = 2Mgh \qquad \frac{1}{2} 2M v_1^2 = 2Mgh \qquad v_1^2 = 2gh$

To isbåter (en med masse *m* og en med masse *2m*) kappkjører på en friksjonsfri, horisontal, frossen innsjø. Begge båtene starter fra ro, og vinden utøver samme, konstante kraft på begge. Hvilken isbåt krysser mållinjen med mest kinetisk energi K ?



1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De har den samme K idet de når mållinjen.

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{net}}\, dx = K_1 - K_0 = K_1$

siden kraften er den samme, er også den kinetiske energien den samme

Hvilken kommer først fram?

1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De kommer fram samtidig.

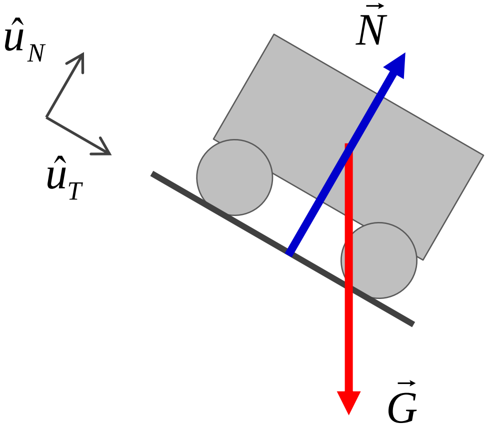
$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m v_1^2 = 2m v_2^2$$

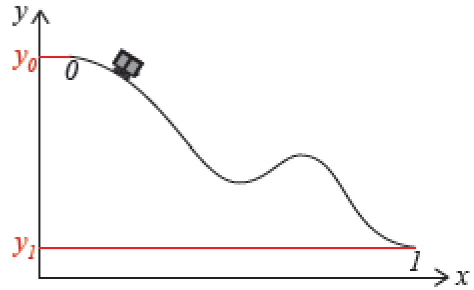
$$v_1 = \sqrt{2} v_2$$

isbåten med masse *m* er raskere og kommer først fram.

Hva hvis bevegelsen er betinget? Berg-og-dal-bane



vi ser bort fra friksjon
og luftmotstand



gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

normalkraften varierer i retning og størrelse, avhengig av

- vinkel med horisontale
- krumningsradius

normalkraften og vei er ortogonal i hver punkt

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{N} + \vec{G}) \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{G} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^1 \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mg\,\hat{j} \cdot \big(\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\big) = -mg\,(y_1 - y_0)$$

gravitasjon gjør positivt arbeid på vogn

arbeid-energi teorem: $W = K_1 - K_0$

$$-mg(y_1 - y_0) = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

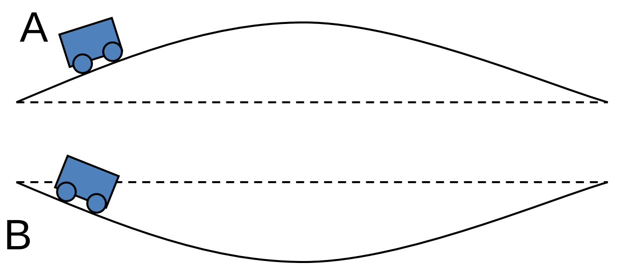
$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

akkurat det samme som for skrått kast

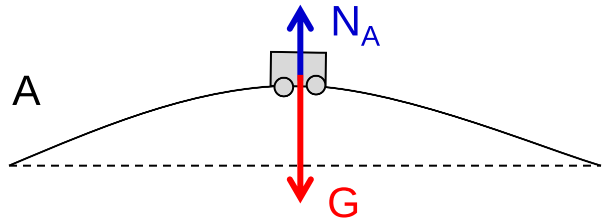
normalkraften gjør ingen arbeid

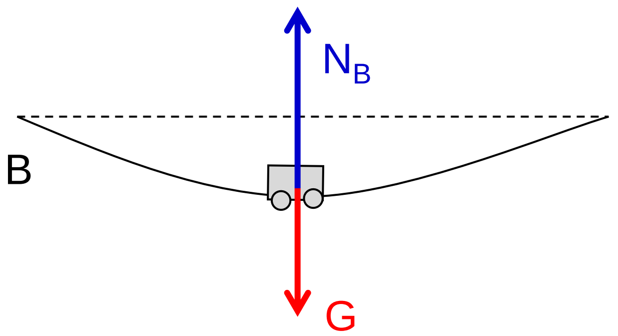
Hva hvis vi inkluderer friksjon ?

En vogn i en berg-og-dal-bane kan rulle langs banen A eller B. Hvordan er forholdet mellom arbeidet utført av friksjon på vognen langs banen A og B?



1. $|W_A| < |W_B|$
2. $|W_A| = |W_B|$
3. $|W_A| > |W_B|$





$$N_A - G = ma_y = -m\frac{v^2}{R}$$

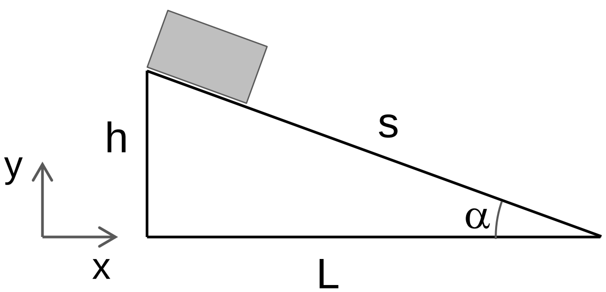
$$N_A = mg - m\frac{v^2}{R} < mg$$

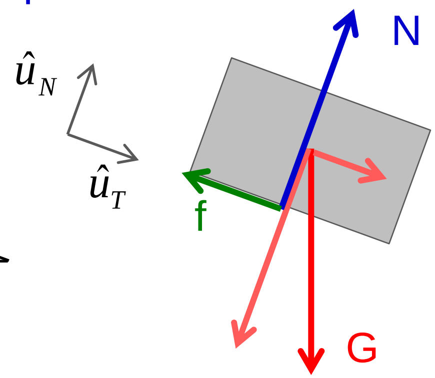
$$N_B - G = ma_y = m\frac{v^2}{R}$$

$$N_B = mg + m\frac{v^2}{R} > mg$$

$$f_B = \mu N_B > \mu N_A = f_A$$

hvor rask sklir en bok på skråplan?





hastighet i tangensialretning: $\vec{v} = v\,\hat{u}_T$

gravitasjon:

$$\vec{G} = -mg\,\hat{j} = mg\sin\alpha\,\hat{u}_T - mg\cos\alpha\,\hat{u}_N$$

normalkraft:

N2L i $\hat{u}_N$ retning: $\vec{N} = mg\cos\alpha\,\hat{u}_N$

friksjon:

$$\vec{f} = -\mu N\,\hat{u}_T = -\mu\,mg\cos\alpha\,\hat{u}_T$$

$$W_G = \int_{t_0}^{t_1} \vec{G}\cdot\vec{v}\,dt = mg\sin(\alpha)\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = mg\sin(\alpha)s = mgh$$

$$W_N = \int_{t_0}^{t_1} \vec{N}\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

$$W_f = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt = -\mu mg\cos(\alpha)\int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

$$= -\mu mg\cos(\alpha)\,s = -\mu mgL$$

$$W_{\text{net}} = mg(h-\mu L)$$

arbeid-energi teorem:

$$mg(h-\mu L) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$v_0 = 0$ $\qquad$ $v_1^2 = 2g(h-\mu L)$

betingelse: $h - \mu L \geq 0$

$$\frac{h}{L} - \mu \geq 0$$

$$\tan(\alpha) \geq \mu$$

Effekt: arbeid per tidsenhet (momentant)

arbeid i et kort tidsintervall: $\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$

i et kort intervall er kraften konstant:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}\, dt = \vec{F} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r}\, dt = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

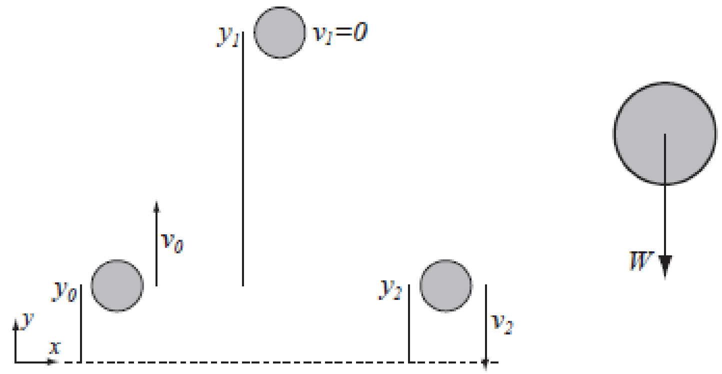
effekt: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

enhet: 1 Watt = 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s

(1 hestekraft = 1 hk = 735.5 W)

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\, dt$

Arbeid i tyngdefelt



Jeg kaster en ball opp i luften med hastighet v_0.

kinetisk energi: $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

på toppen av banen: $v_1 = 0$ $\quad K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$

Hva har skjedd med energien?

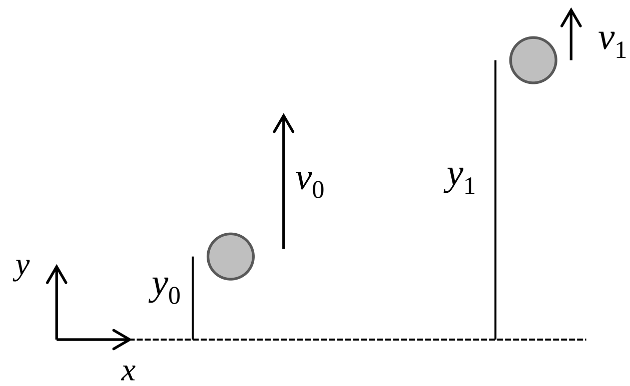
etter ballen har kommet ned igjen: $v_2 = -v_0$ $\quad K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = K_0$

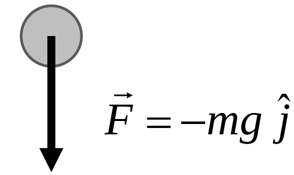
Hvor kommer energien fra?

energi: størrelse som er bevart

arbeid: tilført mekanisk energi

Arbeid i tyngdefelt





arbeid: $W_{0,1} = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= -mg\,\hat{j} \cdot \int_0^1 d\vec{r} = -mg\,\hat{j} \cdot (y_1 - y_0)\,\hat{j} = -mg\,(y_1 - y_0) = mgy_0 - mgy_1$

arbeid-energi teorem:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$mgy_0 - mgy_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$U = mgy$ har samme enhet $\Rightarrow$ energi

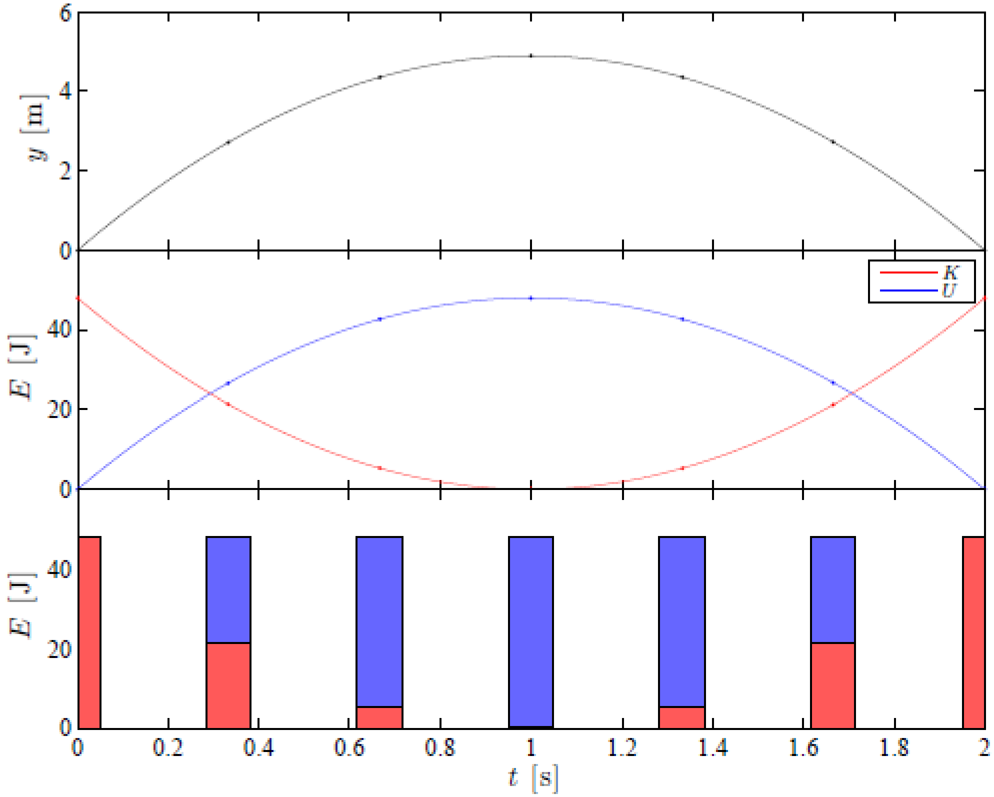
potensiell energi

$$mgy_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mgy_1 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

total energi er konstant: $E = U + K$

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

vertikal kast



kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v^2$

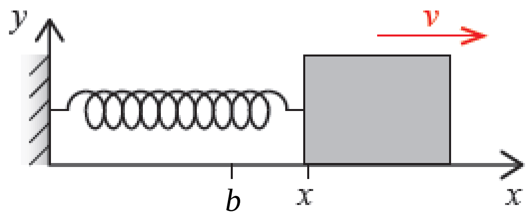
potensiell energi $U = mgy$

total energi er konstant: $E = U + K$

energibevaring

Fjær

fjærkonstant *k*
likevektslengde *b*



$$F(x) = -k(x-b)$$

(vi ser bort fra friksjon og luftmotstand)

arbeid for å bevege klossen fra x_0 til x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = -k\int_{x_0}^{x_1}(x-b)\,dx = -k\int_{x_0-b}^{x_1-b} x'\,dx' = -k\left(\frac{1}{2}(x_1-b)^2 - \frac{1}{2}(x_0-b)^2\right)$$

$$x' = x - b$$

arbeid-energi teorem:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

$$\frac{1}{2}k(x_0-b)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(x_0-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1-b)^2$$

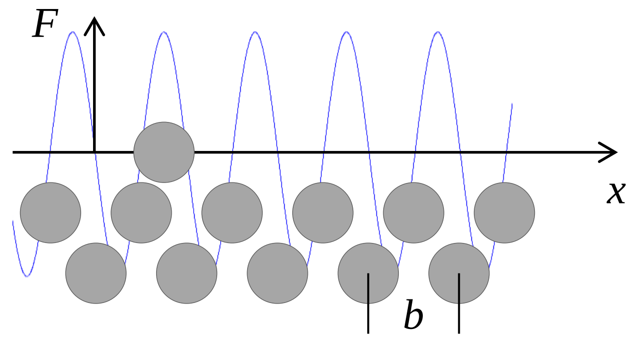
$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

potensiell energi for en fjær:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2$$

potensiell energi er
avhengig av kraften

Periodisk kraft mellom atomer



$$F(x) = -F_0 \sin(\frac{2\pi x}{b})$$

arbeid for å bevege atomet fra x_0 til x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = -F_0 \int_{x_0}^{x_1} \sin(\frac{2\pi x}{b})\,dx \qquad x' = \frac{2\pi x}{b} \qquad dx' = \frac{2\pi}{b}dx$$

$$W_{0,1} = -F_0 \frac{b}{2\pi} \int_{\frac{2\pi x_0}{b}}^{\frac{2\pi x_1}{b}} \sin(x')\,dx' = -\frac{F_0 b}{2\pi}\left(-\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) + \cos(\frac{2\pi x_0}{b})\right) = \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b})$$

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

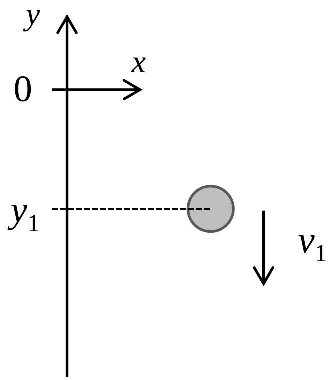
$$\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b}) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x}{b})$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b}) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b})$$

negativ potensiell energi?

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$



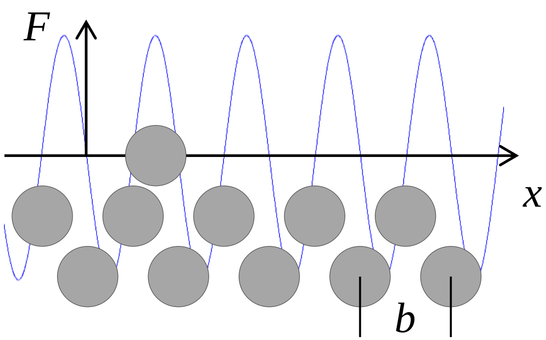
vi kan velge nullpunktet for potensiell energi

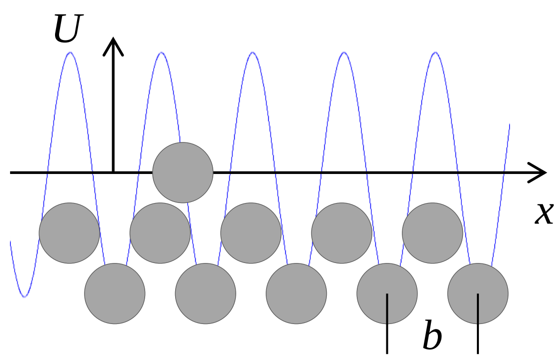
$$U_1 = mgy_1 < 0$$

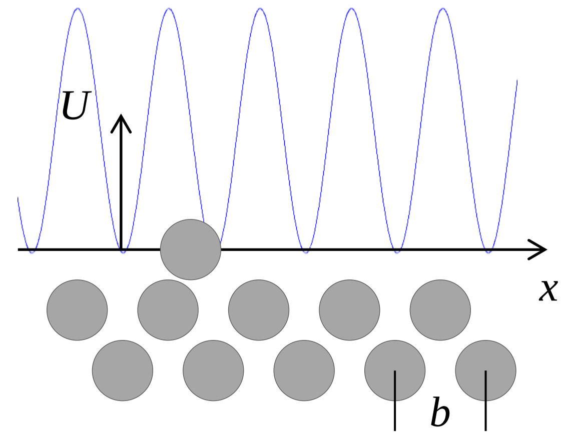
vi velger et annet nullpunkt:

$$U'(x) = \frac{F_0 b}{2\pi}\left(1 - \cos(\frac{2\pi x}{b})\right)$$

$$U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x}{b})$$







$$U' = U + C$$

$$K_0 + U_0' = K_1 + U_1'$$

$$K_0 + U_0 + C = K_1 + U_1 + C$$

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

nullpunkt for potensiell energi:
ingen betydning for energibevaring

kinetisk energi kan ikke være negativ:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$